Elementi della teoria degli insiemi

L'insieme e i suoi elementi

Il termine **insieme** indica una collezione, un raggruppamento di oggetti, di persone o cose, di valori.

Chiamiamo **elementi** gli oggetti che formano l'insieme.

Insieme dei numeri primi minori di **10**: **1,3,5,7**

Dobbiamo essere in grado di dire con assoluta precisione **se un oggetto sta o non sta** nell'insieme stesso.

Gli elementi devono essere **distinguibili tra loro** cioè non devono ripetersi all'interno dell'insieme.

L’insieme e i suoi elementi

Nozioni generali

Gli insiemi vengono indicati con le lettere maiuscole A, B, C, …

Il simbolo $\in$ si chiama **simbolo di appartenenza**

se un elemento a sta nell’insieme A, si dice che a **appartiene** all’insieme A e si scrive $a \in A$.

Se un elemento b non sta nell’insieme A, si dice che b **non appartiene** all’insieme A e si scrive $b \notin A$.

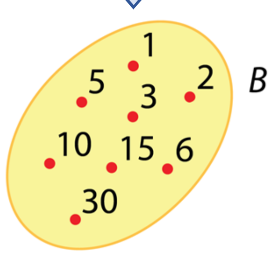
Rappresentazione di un insieme

In matematica è convenzione rappresentare gli insiemi in tre modi diversi:

- rappresentazione grafica con i diagrammi di **Eulero-Venn**;
- rappresentazione per elencazione o estensiva o tabulare;
- rappresentazione per caratteristica o intensiva.

Per rappresentare un insieme con i **diagrammi di *Eulero-Venn*** si disegna una linea chiusa; all’interno della linea vengono posti gli elementi, non ripetuti, che appartengono all’insieme.

B è l’insieme dei numeri naturali divisori di 30



Rappresentazione di un insieme

In matematica è convenzione rappresentare gli insiemi in tre modi diversi:

- rappresentazione grafica con i diagrammi di Eulero-Venn;
- rappresentazione per **elencazione o estensiva** o tabulare;
- rappresentazione per caratteristica o intensiva.

Nella **rappresentazione per elencazione**, o **estensiva**, gli elementi dell'insieme vengono scritti tutti all'interno di due parentesi graffe e sono separati gli uni dagli altri da un punto e virgola e non ha importanza l'ordine in cui vengono scritti.

La rappresentazione per elencazione dell'insieme *B* dei numeri naturali divisori di 30 è:

⇩

$$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{1};\ \mathbf{2};\ \mathbf{3};\ \mathbf{5};\ \mathbf{6};\ \mathbf{10};\ \mathbf{15};\ \mathbf{30}\}$$

Rappresentazione di un insieme

In matematica è convenzione rappresentare gli insiemi in tre modi diversi:

- rappresentazione grafica con i diagrammi di Eulero-Venn;
- rappresentazione per elencazione o estensiva o tabulare;
- rappresentazione per **caratteristica o intensiva.**

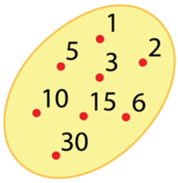
Nella **rappresentazione per caratteristica**, o **intensiva**, viene evidenziata la proprietà che caratterizza tutti e soli gli elementi dell'insieme.

La rappresentazione per caratteristica dell'insieme *C* dei numeri pari minori di 20 è:

⇩

$$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}, \boldsymbol{x} < \mathbf{20}\}$$

Rappresentazione di un insieme



$\boldsymbol{B} = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10;\ 15;\ 30\}$ $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}, \boldsymbol{x} < 20\}$

Rimane solo da scegliere quale metodo usare in funzione dell'esempio che necessito rappresentare.

- **Eulero-Venn:** utile nei casi in cui il **numero** degli **elementi** dell'insieme sia **piccolo**.
- **Elencazione:** usato per insiemi con un numero finito di elementi, cioè **insiemi finiti**.
- **Caratteristica:** con questo metodo è possibile rappresentare un insieme con un numero infinito di elementi, cioè un **insieme infinito**.

Insiemi uguali, insieme vuoto

- Due **insiemi** *A* e *B* si dicono **uguali** se hanno gli stessi elementi; $A = B$
- Due **insiemi** *C* e *D* si dicono **diversi** se non contengono gli stessi elementi. $C \neq D$

$\boldsymbol{A} = \{x |\ x \text{ è } un\ numero\ pari, 2 \leq x \leq 5\}$;
$\boldsymbol{B} = \{2;\ 4\}$

$\boldsymbol{C} = \{x |\ x \text{ è } una\ vocale\ della\ parola\ Paolo\}$
$\boldsymbol{D} = \{x |\ x \text{ è } una\ vocale\ della\ parola\ M\text{ilano}\}$

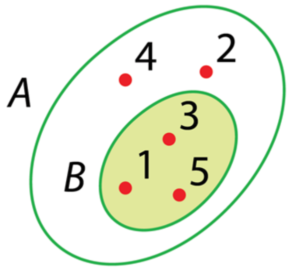
Un insieme privo di elementi si dice **insieme vuoto**, indicando l'insieme vuoto con ∅ oppure con { }.

$\mathbf{A} = \{x | x \text{ è } una\ consonante\ della\ parola\ Io\}$;
$\mathbf{A} = \emptyset$

Sottoinsieme di un insieme

Dati due insiemi $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, si dice che B è un sottoinsieme di A **se ogni elemento** di B è anche elemento di *A*.

$\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ ⇒ «B è **sottoinsieme** di A» oppure «B è **incluso** in A»



$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$
$B = \{1;\ 3;\ 5\}$
$B \neq A$

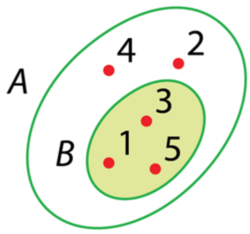
→ tutti gli elementi di B sono anche elementi di A → B è un sottoinsieme di A
B ⊆ A

Sottoinsieme di un insieme

Dati due insiemi ***A*** e ***B***, si dice che *B* (non vuoto) è un **sottoinsieme proprio** di A se B non contiene tutti gli elementi di *A*.

$\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{A}$

⇒ ≪*B* è un **sottoinsieme proprio** di A≫ oppure ≪*B* è **strettamente contenuto** in A≫



Dati due insiemi *A* e *B*, con *B* sottoinsieme di *A* e *A* = *B*, diciamo che *B* e un **sottoinsieme improprio** o **banale** di *A*.

L'insieme vuoto ∅ è allora un sottoinsieme improprio o banale di un qualsiasi insieme *A*.

Proprietà dell'inclusione

Proprietà

Proprietà riflessiva
Ogni insieme è incluso in se stesso.
In simboli: $A \subseteq A$.

Proprietà antisimmetrica
Se A è incluso in B e B è incluso in A, allora A è uguale a B.
In simboli: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, allora $A = B$.

Proprietà transitiva
Se A è incluso in B e B è incluso in C, allora A è incluso in C.
In simboli: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$.

Insieme delle parti

Dato un insieme *A*, chiamiamo **insieme delle parti** di *A* l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi dell'insieme *A*.

Indichiamo l'insieme delle parti di *A* con $\boldsymbol{\mathcal{P}(A)}$.

L'insieme delle parti di $A = \{r;\ s;\ t\}$ è:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset;\ \{r\};\ \{s\};\ \{t\};\ \{r\ ;\ s\};\ \{r\ ;\ t\};\ \{s;\ t\}, \{r\ ;\ s;\ t\}\}$$

Se $\boldsymbol{A} = \emptyset$ allora $\boldsymbol{\mathcal{P}(A)} = \{\emptyset\}$, l'insieme vuoto ammette un unico sottoinsieme, che è se stesso.

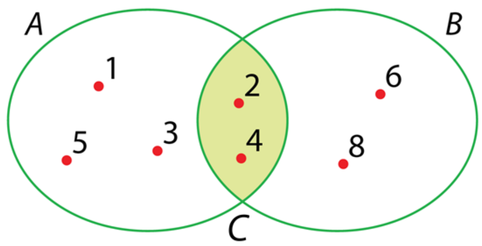
Se A contiene un numero $\boldsymbol{n}$ di elementi $\boldsymbol{\mathcal{P}(A)}$ contiene $\mathbf{2^n}$ elementi.

Operazioni tra insiemi

Intersezione

Si dice **intersezione di due insiemi** *A* e *B* l'insieme *C* che ha per elementi gli **elementi comuni** ad *A* e *B*.

$\boldsymbol{C = A \cap B}$ ⇒ «*C* uguale *A* **intersezione** *B*»



La rappresentazione caratteristica dell'insieme *C* è: $C = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$
$B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$
$C = \{2;\ 4\}$

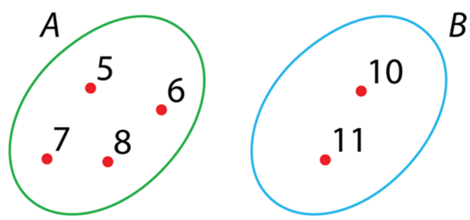
Operazioni tra insiemi

Intersezione

Se due insiemi ***A* e *B* non hanno elementi in comune o uno dei due è vuoto**, la loro intersezione è l'insieme vuoto:

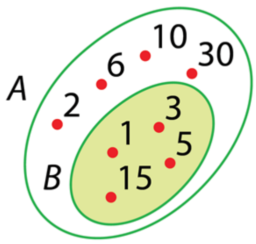
$$A \cap B = \emptyset$$

In tal caso gli insiemi *A* e *B* si dicono **disgiunti**.



Se B è un sottoinsieme di A, la loro intersezione **è l'insieme B stesso**:

$$A \cap B = B$$



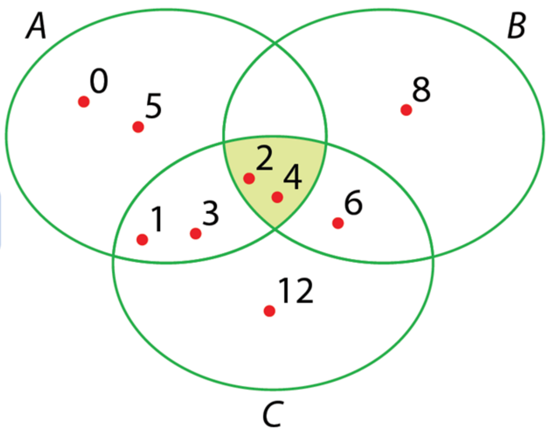
Operazioni tra insiemi

Intersezione

Vogliamo determinare **l'intersezione dei tre insiemi**:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \le 5\};$$
$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è } pari, 1 \le x \le 8\};$$
$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è } un\ divisore\ di\ 12\};$$

L'intersezione è l'insieme i cui elementi **sono comuni ai tre insiemi.**



Per elencazione otteniamo:

$A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\};$ $B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\};$

$C = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\};$

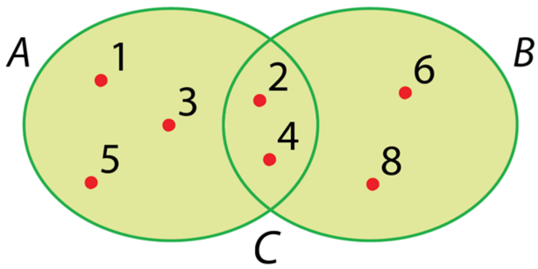
$$A \cap B \cap C = \{2;\ 4\}.$$

Operazioni tra insiemi

Unione

Si dice **unione di due insiemi** *A* e *B* l'insieme *C* che ha per elementi gli elementi che appartengono ad *A* **oppure** a *B*.

$\boldsymbol{C = A \cup B}$ ⇨ «*C* uguale *A* **unione** *B*»



$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$

$B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$

$C = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8\}$

La rappresentazione caratteristica dell'insieme *C*, è: $C = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$

1.5 Operazioni tra insiemi

Unione

Se ***B* è un sottoinsieme di *A***, la loro unione è l'insieme *A*:

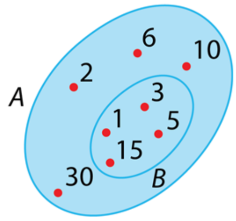
$$A \cup B = A$$

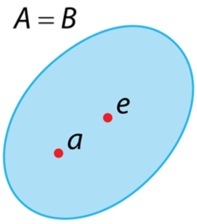
Se l'insieme ***B* è vuoto**, l'unione di *A* con *B* è l'insieme *A* stesso:

$$A \cup B = A \cup \emptyset = A$$

Se i due insiemi ***A* e *B* sono uguali** la loro unione è:

$$A \cup B = A = B$$





1.5 Operazioni tra insiemi

Unione

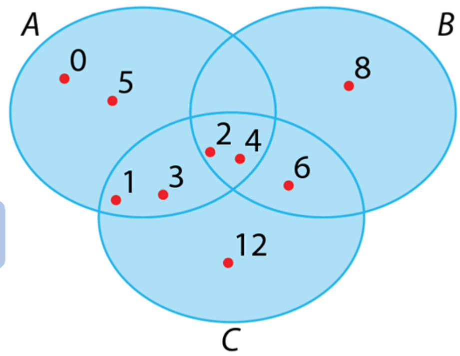
Determiniamo **l'unione dei tre insiemi:**

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\};$$
$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è } pari, 1 \leq x \leq 8\};$$
$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è } un\ divisore\ di\ 12\};$$

L'unione è l'insieme che contiene **tutti gli elementi di *A*, *B* e *C* presi una sola volta**.

Per elencazione otteniamo:

$$A \cup B \cup C = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 12\}$$

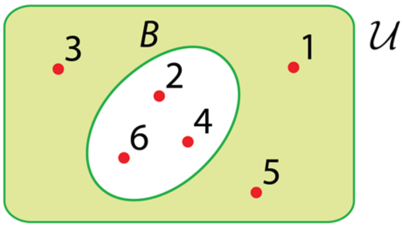


L'insieme universo e l'insieme complementare

Prendiamo un insieme ambiente i cui elementi sono **tutti gli oggetti** su cui si sta lavorando; un tale insieme viene detto **insieme universo** e si indica con la lettera $\mathcal{U}$.

Dati l'insieme universo $\mathcal{U}$ e un suo sottoinsieme B, si dice **complementare** di B rispetto a $\mathcal{U}$ l'insieme che ha come elementi gli elementi di $\mathcal{U}$ che non appartengono ad B.

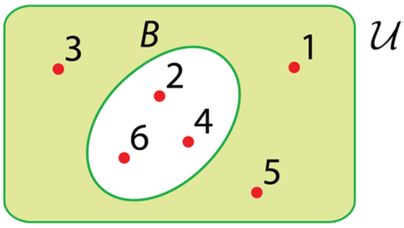
Indichiamo il **complementare dell'insieme B** rispetto a $\mathcal{U}$ con $\overline{B}$ o anche $C_{\mathcal{U}}B$.



$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{\mathbf{1};\ \mathbf{2};\ \mathbf{3};\ \mathbf{4};\ \mathbf{5};\ \mathbf{6}\}$
$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2};\ \mathbf{4};\ \mathbf{6}\}$

complementare di B rispetto a $\mathcal{U}$ è: $\overline{\boldsymbol{B}} = \{\mathbf{1};\ \mathbf{3};\ \mathbf{5}\}$

L'insieme universo e l'insieme complementare



$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{\mathbf{1};\ \mathbf{2};\ \mathbf{3};\ \mathbf{4};\ \mathbf{5};\ \mathbf{6}\}$
$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2};\ \mathbf{4};\ \mathbf{6}\}$

complementare di B rispetto a $\mathcal{U}$ è: $\overline{\boldsymbol{B}} = \{\mathbf{1};\ \mathbf{3};\ \mathbf{5}\}$

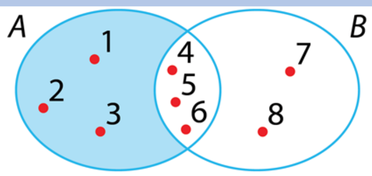
- il **complementare del complementare** di B è B stesso: $\overline{\overline{\boldsymbol{B}}} = \boldsymbol{B}$;
- il **complementare dell'insieme universo** è l'insieme vuoto e viceversa: $\overline{\boldsymbol{\mathcal{U}}} = \emptyset$;
- l'**intersezione dell'insieme B con il suo complementare** è l'insieme vuoto: $\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{B}} = \emptyset$;
- l'**unione dell'insieme B con il suo complementare** è l'insieme universo: $\boldsymbol{B} \cup \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Differenza tra due insiemi

Si dice **differenza tra due insiemi** A e B, considerati nell'ordine, l'insieme che ha per elementi gli elementi di A che non appartengono a B.

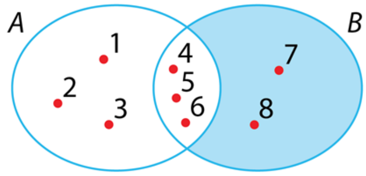
Indichiamo l'insieme differenza con $\mathbf{A \setminus B}$.

La differenza tra gli insiemi $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ e $B = \{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$ è: $A \setminus B = \{1;\ 2;\ 3\}$



La differenza tra due insiemi A e B **non è commutativa**:

$$\{1; 2; 3\} = A \setminus B \neq B \setminus A = \{7;\ 8\}$$



Proprietà delle operazioni tra insiemi

Proprietà

Proprietà di idempotenza

$A \cap A = A$ $\qquad$ $A \cup A = A$

Proprietà commutativa

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$

Proprietà associativa

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\qquad$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Legge di assorbimento

$A \cap (A \cup B) = A$ $\qquad$ $A \cup (A \cap B) = A$

Proprietà distributiva

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

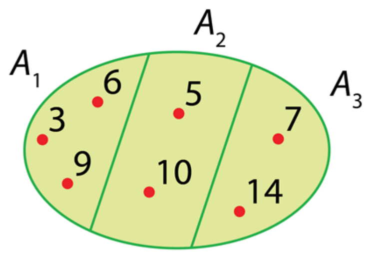
Leggi di De Morgan

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Partizione di un insieme

Due o più sottoinsiemi di *A* costituiscono una **partizione dell'insieme *A*** se soddisfano le seguenti condizioni:

- nessun sottoinsieme è **vuoto**;
- i sottoinsiemi sono a due a due **disgiunti**;
- l'**unione** di tutti i sottoinsiemi è *A*.



$$A = \{3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 9;\ 10;\ 14\}$$

$$A_1 = \{x \mid x \in A \text{ ed è un multiplo di } 3\} = \{3; 6; 9\};$$
$$A_2 = \{x \mid x \in A \text{ ed è un multiplo di } 5\} = \{5; 10\};$$
$$A_3 = \{x \mid x \in A \text{ ed è un multiplo di } 7\} = \{7; 14\}.$$

Il prodotto cartesiano

Consideriamo due insiemi *A* e *B*: $\boldsymbol{A} = \{1; 2\},\ \boldsymbol{B} = \{J; Q; K\}$

Vogliamo scrivere tutte le coppie ottenute prendendo, nell'ordine, un elemento dell'insieme A e un elemento dell'insieme B:

$$(\mathbf{1}; \boldsymbol{J}), (\mathbf{1}; \boldsymbol{Q}), (\mathbf{1}; \boldsymbol{K}), (\mathbf{2}; \boldsymbol{J}), (\mathbf{2}; \boldsymbol{Q}), (\mathbf{2}; \boldsymbol{K})$$

Dati due elementi $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si chiama **coppia ordinata**, indicata con $(a;\ b)$, l'insieme formato dai due elementi $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ presi nell'ordine indicato.

La coppia ordinata $(a;\ b)$ è diversa dalla coppia ordinata $(b;\ a)$: $(\mathbf{1}; \boldsymbol{J}) \neq (\boldsymbol{J}; \mathbf{1})$

Il prodotto cartesiano

$\boldsymbol{A} = \{1; 2\}$, $\boldsymbol{B} = \{J; Q; K\}$ $\Longrightarrow$ $(\mathbf{1}; \boldsymbol{J}), (\mathbf{1}; \boldsymbol{Q}), (\mathbf{1}; \boldsymbol{K}), (\mathbf{2}; \boldsymbol{J}), (\mathbf{2}; \boldsymbol{Q}), (\mathbf{2}; \boldsymbol{K})$

L'insieme delle coppie ordinate si considerano come elementi di un nuovo insieme, detto *prodotto cartesiano* di *A* per *B*.

Il **prodotto cartesiano** di due insiemi *A* e *B*, presi nell'ordine, è l'insieme *C* di **tutte e sole** le coppie ordinate $(a;\ b)$ in cui $a \in A$ e $b \in B$.

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\}$ $\Rightarrow$ «prodotto cartesiano di *A* per *B*» o più semplicemente, « *A* cartesiano *B* » o anche « *A* per *B* ».

Il prodotto cartesiano

Se l'insieme *A* contiene ***n*** elementi e l'insieme *B* contiene ***m*** elementi, il prodotto cartesiano ***A*** × ***B*** contiene ***n* · *m*** elementi.

Il prodotto cartesiano in generale **non è commutativo** cioè: ***A*** × ***B*** ≠ ***B*** × ***A***.

Il prodotto cartesiano

Possiamo **rappresentare il prodotto cartesiano** $A \times B$ in quattro modi diversi:

a. rappresentazione per elencazione;
b. rappresentazione con tabella a doppia entrata;
c. rappresentazione cartesiana;
d. rappresentazione con diagramma ad albero.

a. La rappresentazione per **elencazione** del prodotto cartesiano $A \times B$ è:

$$A \times B = \{(1; J);\ (1; Q);\ (1; K);\ (2; J);\ (2; Q);\ (2; K)\}.$$

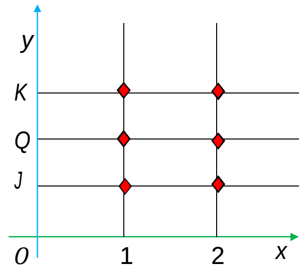
Il prodotto cartesiano

b. Il prodotto cartesiano $A \times B$ si può rappresentare con una **tabella a doppia entrata**; nella prima colonna sono posti gli elementi di A e nella prima riga gli elementi di B. Ogni casella contiene una coppia ordinata $(a;\ b)$.

$A \times B$	J	Q	K
1	$(1; J)$	$(1; Q)$	$(1; K)$
2	$(2; J)$	$(2; Q)$	$(2; K)$

Il prodotto cartesiano

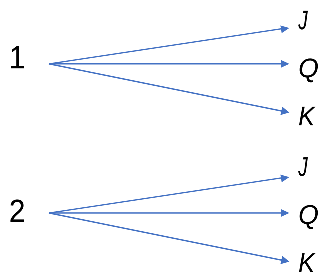
c. Disegniamo due rette perpendicolari che si intersecano in *O*.
Chiamiamo la retta orizzontale ***x*** ***asse delle ascisse*** e la retta verticale ***y*** ***asse delle ordinate.***
Poniamo gli elementi dell'insieme *A* su *x* e gli elementi dell'insieme *B* su *y*, segnandoli simbolicamente con dei punti.
Conduciamo per ogni elemento dell'insieme *A* una retta parallela all'asse *y* e per ogni elemento dell'insieme *B* una retta parallela all'asse *x*.
I punti di intersezione di tutte le rette che abbiamo tracciato sono le coppie cercate.



Il prodotto cartesiano

d. Nel **diagramma ad albero** scriviamo in verticale gli elementi del primo insieme *A*.
Da ogni elemento di *A* facciamo partire un numero di frecce uguale al numero degli elementi del secondo insieme *B*; in corrispondenza di ogni freccia segniamo gli elementi di *B*.
Seguendo le frecce otteniamo le coppie indicate nella terza colonna.

Primo elemento **Secondo elemento** **Coppie di $A \times B$**



$(1; J)$
$(1; Q)$
$(1; K)$
$(2; J)$
$(2; Q)$
$(2; K)$