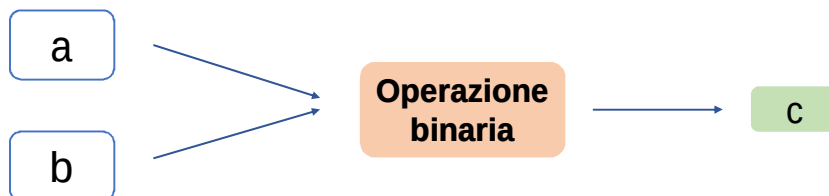


Gli insiemi numerici: i numeri naturali

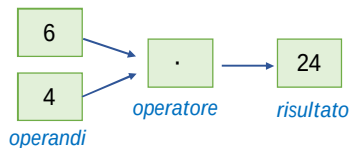
Le operazioni e le loro proprietà

Si chiama **operazione binaria** in un insieme A , non vuoto, un procedimento che fa corrispondere a ogni coppia ordinata $(a; b)$ di elementi di A , anche uguali, uno e un solo elemento c di A .

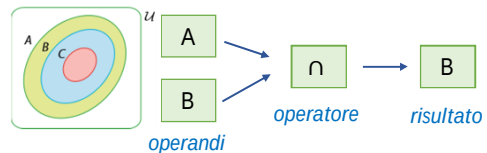


Le operazioni e le loro proprietà

Vediamo due esempi di **operazioni binarie**:



Nell'insieme dei numeri naturali l'operazione di **moltiplicazione** associa ad ogni coppia di numeri naturali un numero naturale che ne è il prodotto.



Nell'insieme universo $\mathcal{U}$ che ha come elementi gli insiemi A, B, C, con $C \subset B \subset A$, l'operazione di **intersezione** associa ad ogni coppia di insiemi il sottoinsieme di $\mathcal{U}$ che ha per elementi quelli in comune ai due insiemi.

Le operazioni e le loro proprietà

Dati un insieme A e un'operazione binaria tra i suoi elementi, a volte è utile rappresentare i possibili risultati con una **tabella a doppia entrata**.

La **tavola pitagorica** restituisce il risultato delle moltiplicazioni tra i primi dieci numeri naturali. Come funziona: il risultato della moltiplicazione

$$6 \cdot 4 = 24$$

si trova nella casella individuata dall'intersezione della **riga del 6** con la **colonna del 4**.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Le operazioni e le loro proprietà

Dato un insieme A , se l'operazione binaria tra i suoi elementi produce un risultato che è anch'esso un elemento dell'insieme, si dice che A è **chiuso rispetto all'operatore**.

$$A = \{0; 1\}$$

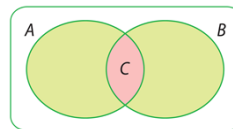
Tutte le caselle contengono solo elementi appartenenti all'insieme A (0 e 1).
Questo vuol dire che l'insieme A è **chiuso** rispetto all'operazione prodotto.

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

In caso contrario, diciamo che l'insieme **non è chiuso rispetto all'operazione**.

In figura vediamo l'insieme $\mathcal{U}$, costituito dai tre insiemi A, B, C . La tabella evidenzia come l'operazione di unione non sia sempre possibile, poiché i risultati di $A \cup B$ e $B \cup A$ non appartengono a $\mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ non è chiuso rispetto all'operazione di unione $\cup$.



$\cup$	A	B	C
A	A	$A \cup B$	A
B	$B \cup A$	B	B
C	A	B	C

Le operazioni e le loro proprietà

Dato un insieme A chiuso rispetto all'operazione $*$, esaminiamo le proprietà che valgono in A rispetto a $*$.

Proprietà

Proprietà commutativa

Nell'insieme A vale la **proprietà commutativa** rispetto all'operazione $*$ se, per ogni coppia di elementi $a, b \in A$, si ha:

$$a * b = b * a$$

Proprietà associativa

Nell'insieme A vale la **proprietà associativa** rispetto all'operazione $*$ se, per ogni terna di elementi $a, b, c \in A$, si ha:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Esistenza dell'elemento neutro

L'insieme A ammette l'**elemento neutro** u rispetto all'operazione $*$ se, per ogni elemento $a \in A$, si ha:

$$a * u = u * a = a$$

Esistenza dell'inverso

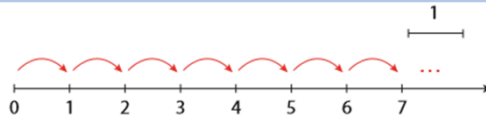
Se l'operazione $*$ possiede nell'insieme A l'elemento neutro u , un elemento $a \in A$ ammette l'**inverso** $\bar{a} \in A$ se:

$$a * \bar{a} = \bar{a} * a = u$$

Se ogni elemento dell'insieme A ammette *uno e un solo* inverso rispetto all'operazione $*$, si dice che l'operazione $*$ è **invertibile** in A .

I numeri naturali

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, 10, 11, \dots\}$ è l'insieme dei **numeri naturali** ed è un **insieme infinito**.



La semiretta orientata è la rappresentazione cartesiana della **successione dei numeri naturali**.

Il **successivo** di un numero naturale è quel numero che lo segue immediatamente nella successione.

141 è il **successivo** di 140

Il **precedente** di un numero naturale, diverso da zero, è quel numero che lo precede immediatamente nella successione:

140 è il **precedente** di 141

I numeri naturali

Se due numeri naturali a e b occupano lo stesso posto nella rappresentazione cartesiana, essi sono **uguali**; scriviamo $a = b$.

Proprietà PROPRIETÀ DELL'UGUAGLIANZA

Proprietà riflessiva

Ogni numero naturale è uguale a se stesso.

$$a = a$$

Proprietà simmetrica

Se un numero naturale a è uguale a un numero naturale b , allora il numero naturale b è uguale al numero naturale a .

Se $a = b$, allora $b = a$.

Proprietà transitiva

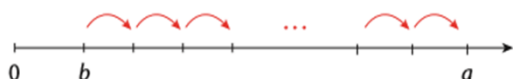
Se un numero naturale a è uguale a un numero naturale b e il numero naturale b è uguale a un numero naturale c , allora il numero naturale a è uguale al numero naturale c .

Se $a = b$ e $b = c$, allora $a = c$.

I numeri naturali

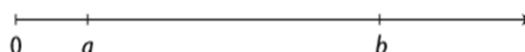
Confronto tra numeri naturali

Se due numeri naturali a e b non occupano lo stesso posto nella rappresentazione cartesiana, essi sono **diversi**: scriviamo $a \neq b$.



Se a è a sinistra di b diciamo che a è **minore** di b : $a < b$.

Se a coincide con b oppure a è a sinistra di b , diciamo che a è **minore o uguale** a b : $a \leq b$.



Se a è a destra di b diciamo che a è **maggiore** di b : $a > b$.

Se a coincide con b oppure a è a destra di b , diciamo che a è **maggiore o uguale** a b : $a \geq b$.

I numeri naturali

Confronto tra numeri naturali

Se a, b, c sono tre numeri naturali, vale la seguente proprietà:

Proprietà

PROPRIETÀ TRANSITIVA DELLA DISUGUAGLIANZA

- ▶ Se $a < b$ e $b < c$, allora $a < c$ (**figura 9**).
- ▶ Se $a > b$ e $b > c$, allora $a > c$ (**figura 10**).
- ▶ Se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$.
- ▶ Se $a \geq b$ e $b \geq c$, allora $a \geq c$.

FIG.
9

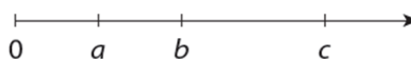
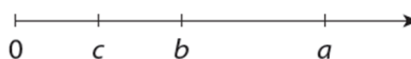


FIG.
10



ESEMPI

1. Se $2 < 3$ e $3 < 5$, allora $2 < 5$.
2. Se $3 > 1$ e $1 > 0$, allora $3 > 0$.

Operazioni in $\mathbb{N}$

Addizione

La **somma** di due numeri naturali a e b è il numero naturale c , ottenuto a partire da a applicando l'operazione di successivo b volte.

Se $b \neq 0$: $a + b = c$, dove a e b sono detti **addendi**.

$$5 + 3 = 5 + \underbrace{1 + 1 + 1}_{3 \text{ volte}} = 8 \quad ; \quad 4 + 0 = 4 \quad ; \quad 2 + 4 = 2 + \underbrace{1 + 1 + 1 + 1}_{4 \text{ volte}} = 6$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Addizione

Proprietà

Proprietà commutativa

La somma di due numeri naturali non cambia se cambia l'ordine degli addendi.

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO

$$5 + 3 = 3 + 5$$

Proprietà associativa

La somma di più numeri naturali non cambia se a due o più addendi si sostituisce la loro somma.

$$(a + b) + c = a + (b + c) \\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$$

Esistenza dell'elemento neutro

0 è l'elemento neutro dell'addizione.

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO

$$2 + 0 = 0 + 2 = 2$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Sottrazione

Si dice **differenza** di due numeri naturali a e b , nell'ordine, quel numero naturale d , se esiste, che addizionato a b dà per somma a . Se esiste d , scriviamo: $a - b = d$.

L'operazione con la quale, dati due numeri naturali, si trova la loro differenza si dice **sottrazione**:

- a è detto **minuendo** e b è detto **sottraendo**;
- nell'insieme dei numeri naturali l'operazione di sottrazione è possibile soltanto se il minuendo è maggiore o uguale del sottraendo.

$$7 - 4 = 3 \text{ perché } 3 + 4 = 7; \quad 4 - 0 = 4; \quad 4 - 4 = 0 \text{ perché } 0 + 4 = 4$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Sottrazione

Proprietà PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLA SOTTRAZIONE RISPETTO ALL'ADDIZIONE O ALLA SOTTRAZIONE

La differenza di due numeri naturali a e b non cambia se al minuendo e al sottraendo si aggiunge uno stesso numero oppure si sottrae uno stesso numero minore o uguale al sottraendo:

1. $a - b = (a + c) - (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}, a \geq b$
2. se $a \geq b \geq d$, allora $a - b = (a - d) - (b - d)$

ESEMPI

1. $12 - 5 = (12 + 2) - (5 + 2)$
2. $12 - 5 = (12 - 2) - (5 - 2)$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Moltiplicazione

Il **prodotto** di due numeri naturali a e b è il numero naturale c ottenuto sommando b addendi uguali ad a : $a \cdot b = a + a + \dots + a = c$, se $b > 1$.

b volte

L'operazione con la quale, dati due numeri naturali si trova il loro prodotto si dice **moltiplicazione**:

- a, b sono detti **fattori**;
- il simbolo dell'operazione moltiplicazione è $\cdot$ oppure $\times$;
- per moltiplicare tre o più numeri naturali si moltiplica il primo con il secondo, il loro prodotto con il terzo e così via fino all'ultimo fattore.

$$2 \cdot 3 = \underbrace{2 + 2 + 2}_{3 \text{ volte}} = 6$$

$$a \cdot 0 = 0, \text{ se } b = 0$$

$$3 \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 1 = a, \text{ se } b = 1$$

$$5 \cdot 1 = 5$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Moltiplicazione

Proprietà

Proprietà commutativa

Il prodotto di due numeri naturali non cambia se cambia l'ordine dei fattori.

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO

$$2 \cdot 7 = 7 \cdot 2$$

Proprietà associativa

Il prodotto di più numeri naturali non cambia se a due o più fattori si sostituisce il loro prodotto.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$$

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Il prodotto di un numero per una somma (o una somma per un numero) non cambia se si moltiplica il numero per ciascun addendo e successivamente si addizionano i prodotti ottenuti.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ \blacktriangleright (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \\ &\forall a, b, c \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

ESEMPI

$$\blacktriangleright 4 \cdot (1 + 4) = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4$$

$$\blacktriangleright (3 + 2) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Moltiplicazione

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione

Il prodotto di un numero per una differenza (o una differenza per un numero) non cambia se si moltiplica il numero per ciascun termine della differenza e successivamente si sottraggono i prodotti ottenuti.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright a \cdot (b - c) &= a \cdot b - a \cdot c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}, b &\geq c \\ \blacktriangleright (a - b) \cdot c &= a \cdot c - b \cdot c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}, a &\geq b \end{aligned}$$

ESEMPI

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 4 \cdot (5 - 2) &= 4 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \\ \blacktriangleright (9 - 3) \cdot 5 &= 9 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Esistenza dell'elemento neutro

1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO

$$4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$$

Legge di annullamento del prodotto

Il prodotto di due numeri naturali è zero se e solo se almeno uno dei due fattori è zero.

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

2.3 Operazioni in $\mathbb{N}$

Divisione

Si dice **quoziente** esatto di due numeri naturali a e b , nell'ordine, con $b \neq 0$, quel numero naturale q , se esiste, che moltiplicato per b dà come prodotto a . Se q esiste: $a : b = q$.

L'operazione con la quale, dati due numeri naturali, si trova il quoziente si dice **divisione**:

- a è il **dividendo** e b il **divisore**;
- nell'insieme dei numeri naturali l'operazione di divisione è **possibile soltanto se** il dividendo è **multiplo** del divisore.

$$30 : 5 = 6 \quad \text{perché } 6 \cdot 5 = 30$$

$$\text{se } a \neq 0 \text{ e } b = 0,$$

$$a : 0 = \text{impossibile}$$

$$\text{se } a = 0 \text{ e } b = 0,$$

$$0 : 0 = \text{forma indeterminata}$$

$$\text{se } a = 0 \text{ e } b \neq 0,$$

$$a : b = 0 : b = 0$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Divisione

Proprietà

Proprietà invariante della divisione rispetto alla moltiplicazione o alla divisione

Il quoziente esatto di due numeri naturali a e b , con $b \neq 0$, non cambia se si moltiplicano a e b per uno stesso numero naturale diverso da zero oppure se si dividono a e b per un sottomultiplo comune diverso da zero.

In simboli, quando sono possibili le divisioni in $\mathbb{N}$:

$$\blacktriangleright a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$$

$$\blacktriangleright a : b = (a : c) : (b : c)$$

con $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

ESEMPI

$$\blacktriangleright 30 : 15 = (30 \cdot 2) : (15 \cdot 2)$$

$$\blacktriangleright 30 : 15 = (30 : 3) : (15 : 3)$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Divisione

Proprietà distributiva a destra della divisione rispetto all'addizione

Il quoziente esatto di una somma con un numero naturale che è divisore di ogni termine della somma non cambia se si divide ogni addendo per quel numero e si addizionano successivamente i quozienti esatti ottenuti.

In simboli, quando sono possibili le divisioni in $\mathbb{N}$:

$$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$$

con $c \neq 0$.

ESEMPIO

$$(28 + 14 + 35) : 7 = (28 : 7) + (14 : 7) + (35 : 7)$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

Divisione

Proprietà distributiva a destra della divisione rispetto alla sottrazione

Il quoziente esatto di una differenza con un numero naturale che è divisore di ogni termine della differenza non cambia se si dividono minuendo e sottraendo per quel numero e si sottraggono successivamente i quozienti esatti ottenuti.

In simboli, quando sono possibili le divisioni in $\mathbb{N}$ e $a \geq b$:
 $(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$
 con $c \neq 0$.

ESEMPIO

$$(28 - 14) : 7 = (28 : 7) - (14 : 7)$$

Operazioni in $\mathbb{N}$

I numeri 0 e 1

Il numero 0		
0 è l'elemento neutro per l'addizione.	$a + 0 = 0 + a = a$	$4 + 0 = 0 + 4 = 4$
0 è l'elemento neutro a destra per la sottrazione.	$a - 0 = a$	$5 - 0 = 5$
Se in una sottrazione il minuendo e il sottraendo sono uguali fra loro, la differenza è 0.	$a - a = 0$	$5 - 5 = 0$
Il prodotto di due numeri, dei quali uno sia 0, è 0. Si dice allora che 0 è l'elemento assorbente della moltiplicazione.	$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	$3 \cdot 0 = 0 \cdot 3 = 0$
Il quoziente tra 0 e un numero diverso da 0 è 0. Si dice allora che 0 è l'elemento assorbente a sinistra della divisione.	Se $a \neq 0$, $0 : a = 0$	$0 : 4 = 0$
La divisione tra un numero diverso da 0 e 0 è impossibile.	Se $a \neq 0$, $a : 0$ è impossibile, nessun numero moltiplicato per 0 dà come risultato a	$4 : 0$ è impossibile
La divisione nella quale il dividendo e il divisore sono entrambi 0 è indeterminata.	$0 : 0$ produce infiniti risultati	$0 : 0$ è indeterminata
Il numero 1		
1 è l'elemento neutro per la moltiplicazione.	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$
Se in una divisione il dividendo e il divisore sono uguali il quoziente è 1.	$a : a = 1$	$4 : 4 = 1$
1 è l'elemento neutro a destra della divisione.	$a : 1 = a$	$4 : 1 = 4$

Elevamento a potenza

Dati un numero naturale a e un numero naturale n , la **potenza n-esima** (si legge «potenza ennesima») di a è il prodotto di n fattori tutti uguali ad a , se $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$.

La **potenza n-esima** si scrive a^n e si legge «a elevato a n»:

- il numero a si chiama **base** della potenza;
- il numero n si chiama **esponente** della potenza;
- se $n = 2$, scriviamo a^2 e leggiamo «a al quadrato»;
- 0^0 non ha significato.

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$2^0 = 1$$

$$3^1 = 3$$

$$0^1 = 0$$

Elevamento a potenza

Proprietà delle potenze

Proprietà

1. Il prodotto di due potenze di ugual base è una potenza che ha per base la base delle potenze stesse e per esponente la somma degli esponenti.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

ESEMPIO

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3}$$

2. Il quoziente di due potenze di ugual base, diversa da zero, con l'esponente della prima maggiore o uguale a quello della seconda, è una potenza che ha per base la base delle potenze stesse e per esponente la differenza degli esponenti.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ con } m \geq n$$

ESEMPIO

$$3^4 : 3^3 = 3^{4-3}$$

3. La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la base della potenza stessa e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

ESEMPIO

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3}$$

4. La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

ESEMPIO

$$(10 \cdot 2)^2 = 10^2 \cdot 2^2$$

5. La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze del dividendo e del divisore.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

ESEMPIO

$$(30 : 6)^3 = 30^3 : 6^3$$

Elevamento a potenza

Espressioni aritmetiche

Nelle espressioni aritmetiche, in assenza di parentesi, le operazioni devono essere svolte rispettando il seguente ordine:

1. **elevamento a potenza;**
2. **moltiplicazioni e divisioni**, nell'ordine in cui si presentano;
3. **addizioni e sottrazioni**, nell'ordine in cui si presentano.

Elevamento a potenza

Espressioni aritmetiche

ESEMPIO

$$20 - (3^3 - 2^3) : 19 + [(4^3 : 4 - 1) : 5 - (5^2 \cdot 3 - 15) : 20] \cdot 15 + [(5^2 \cdot 3 - 55) : (2^3 \cdot 2^3 - 59)] =$$

- Eseguiamo le potenze nelle parentesi tonde:

$$= 20 - (27 - 8) : 19 + [(4^2 - 1) : 5 - (25 \cdot 3 - 15) : 20] \cdot 15 + [(25 \cdot 3 - 55) : (64 - 59)] =$$

- Eseguiamo le operazioni nelle parentesi tonde:

$$= 20 - 19 : 19 + [(16 - 1) : 5 - (75 - 15) : 20] \cdot 15 + [(75 - 55) : 5] =$$

$$= 20 - 19 : 19 + [15 : 5 - 60 : 20] \cdot 15 + [20 : 5] =$$

- Eseguiamo le operazioni nelle parentesi quadre:

$$= 20 - 19 : 19 + [3 - 3] \cdot 15 + 4 =$$

$$= 20 - 19 : 19 + 0 \cdot 15 + 4 =$$

- Eseguiamo le operazioni nell'espressione senza parentesi:

$$= 20 - 1 + 4 = 23$$

Ancora sull'uguaglianza tra numeri naturali

Uguaglianza

Proprietà

Legge di monotonia dell'addizione. Se due numeri a e b sono uguali, sono uguali anche i numeri che si ottengono sommando a essi uno stesso numero naturale c .

$$\text{Se } a = b, \text{ allora } a + c = b + c$$

$$\text{Se } a + c = b + c, \text{ allora } a = b$$

Legge di monotonia della moltiplicazione. Se due numeri a e b sono uguali, sono uguali anche i numeri che si ottengono moltiplicandoli per uno stesso numero naturale c .

$$\text{Se } a = b, \text{ allora } a \cdot c = b \cdot c$$

$$\text{Se } a \cdot c = b \cdot c \text{ e } c \neq 0, \text{ allora } a = b$$

Ancora sull'uguaglianza tra numeri naturali

Disuguaglianza

Proprietà

Legge di monotonia dell'addizione. Se due numeri a e b sono disuguali, sono disuguali nello stesso senso anche i numeri che si ottengono sommando ad essi uno stesso numero naturale c .

$$\text{Se } a \geq b, \text{ allora } a + c \geq b + c \quad \text{oppure} \quad \text{se } a \leq b, \text{ allora } a + c \leq b + c.$$

$$\text{Se } a + c \geq b + c, \text{ allora } a \geq b \quad \text{oppure} \quad \text{se } a + c \leq b + c, \text{ allora } a \leq b.$$

Legge di monotonia della moltiplicazione. Se due numeri a e b sono disuguali, sono disuguali nello stesso senso anche i numeri che si ottengono moltiplicandoli per uno stesso numero naturale c , purché $c \neq 0$.

$$\text{Se } a \geq b \text{ e } c \neq 0, \text{ allora } a \cdot c \geq b \cdot c \quad \text{oppure} \quad \text{se } a \leq b \text{ e } c \neq 0, \text{ allora } a \cdot c \leq b \cdot c.$$

$$\text{Se } a \cdot c \geq b \cdot c \text{ e } c \neq 0, \text{ allora } a \geq b \quad \text{oppure} \quad \text{se } a \cdot c \leq b \cdot c \text{ e } c \neq 0, \text{ allora } a \leq b.$$

Divisibilità

Un numero naturale è **pari** se è **divisibile** per 2.

Un numero naturale è **dispari** se **non è divisibile** per 2.

Un numero è divisibile per:	
2	se il numero è pari.
3	quando la somma delle sue cifre è divisibile per 3.
5	quando l'ultima sua cifra è 0 o 5.
11	se la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari è 0, 11 o un multiplo di 11.
4	quando le sue ultime due cifre formano un numero divisibile per 4.
8	quando le sue ultime tre cifre formano un numero divisibile per 8.
9	quando la somma delle sue cifre è divisibile per 9.
10	quando la sua ultima cifra è 0.
25	quando le sue ultime due cifre formano un numero divisibile per 25.
100	quando le sue ultime due cifre sono entrambe 0.

Divisibilità

Un numero naturale maggiore di 1 si dice **primo** se ha per divisori soltanto se stesso e il numero 1.

Sono esempi di numeri primi: 2,3,5,7,11,13,17,....

I numeri che **non** sono numeri **primi** possono essere **scomposti in fattori primi**.

Scomposizione

Regola

Per **scomporre un numero non primo in fattori primi**:

1. si divide il numero per il più piccolo numero primo che è suo divisore;
2. si divide di nuovo il quoziente ottenuto per il più piccolo numero primo che è suo divisore;
3. si ripete il procedimento fino a ottenere il numero 1.

1260		2
630		2
315		3
105		3
35		5
7		7
1		

Pertanto: $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

Si dice **massimo comune divisore** (e si scrive **M.C.D.**) di due o più numeri naturali, diversi da zero, il più grande dei divisori comuni dei numeri dati.

Due numeri naturali si dicono **primi tra loro** se il loro M.C.D. è 1.

$$\begin{aligned} \text{M.C.D.}(18; 24) ? & \longrightarrow D(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\} \\ & D(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\} \end{aligned}$$

M.C.D.(18; 24) è il massimo dei divisori comuni di 18 e 24, cioè è il valore massimo dell'insieme $D(18) \cap D(24) = \{1; 2; 3; 6\}$; quindi M.C.D.(18; 24) = 6.

M.C.D. di più numeri naturali:

1. scomporre i numeri in fattori primi;
2. moltiplicare i fattori primi comuni ai numeri dati, presi una sola volta e con l'esponente più piccolo;
3. Il prodotto ottenuto è il M.C.D. cercato.

ESEMPIO

Calcoliamo il M.C.D. tra i numeri 420 e 120.

Le scomposizioni in fattori primi di 420 e di 120 sono le seguenti:

$$\blacktriangleright 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\blacktriangleright 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{Quindi M.C.D.}(420; 120) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

Si dice **minimo comune multiplo** (e si scrive **m.c.m.**) di due o più numeri naturali, diversi da zero, il più piccolo dei multipli comuni dei numeri dati.

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.}(4; 6) ? & \longrightarrow M(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; \dots\} \\ & M(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; \dots\} \end{aligned}$$

m.c.m.(4; 6) è il minimo dei multipli comuni di 4 e 6, cioè il valore minimo dell'insieme $M(4) \cap M(6) = \{12; 24; \dots\}$; quindi m.c.m.(4; 6) = 12.

m.c.m. di più numeri naturali:

1. scomporre i numeri in fattori primi;
2. moltiplicare i fattori primi comuni e non comuni ai numeri dati, presi una sola volta e con l'esponente più grande;
3. Il prodotto ottenuto è il m.c.m. cercato.

ESEMPIO

Calcoliamo il m.c.m. tra i numeri 42 e 12.

Le scomposizioni in fattori primi di 42 e di 12 sono le seguenti:

$$\blacktriangleright 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\blacktriangleright 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\text{Quindi m.c.m.}(42; 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84.$$

Divisione con resto

L'operazione di divisione **non è sempre possibile** in $\mathbb{N}$. Quando dividiamo un numero naturale per un altro numero che non è suo divisore abbiamo la **divisione con resto**.

Il **quoziente** di due numeri naturali a e b nell'ordine, con $b \neq 0$, è il più grande numero naturale $\bar{q}$ che, moltiplicato per b , dà come prodotto un numero naturale non maggiore di a . Il resto r della divisione tra due numeri naturali a e b nell'ordine, con $b \neq 0$, è la differenza tra a e il prodotto $b\bar{q}$.

$$a = b\bar{q} + r$$

ESEMPIO

Vogliamo trovare il quoziente e il resto della divisione tra i due numeri 23 e 3.

► $\bar{q} = 7$, infatti: $3 \cdot 7 = 21 < 23$ e $3 \cdot 8 = 24 > 23$

► $r = 2$, infatti: $23 - 3 \cdot 7 = 23 - 21 = 2$

Possiamo allora scrivere $23 = 3 \cdot 7 + 2$ secondo la formula sopra indicata.

Divisione con resto

Il **quoziente** $\bar{q}$ di due numeri a e b , con $b \neq 0$, **non cambia** se:

- si moltiplicano a e b per uno stesso numero diverso da zero;
- si dividono a e b per un sottomultiplo comune diverso da zero.

ESEMPIO

Se $a = 87$, $b = 36$:

$$\begin{array}{r} 87 \overline{) 36} \\ 15 \overline{) 2} \end{array} \rightarrow \bar{q} = 2, r = 15$$

► Se moltiplichiamo a e b per 2, si ha:

$$a' = 87 \cdot 2 = 174, b' = 36 \cdot 2 = 72$$

$$\begin{array}{r} 174 \overline{) 72} \\ 30 \overline{) 2} \end{array} \rightarrow \bar{q}' = 2, r' = 30 = 15 \cdot 2$$

► Se dividiamo a e b per 3, si ha:

$$a'' = 87 : 3 = 29, b'' = 36 : 3 = 12$$

$$\begin{array}{r} 29 \overline{) 12} \\ 5 \overline{) 2} \end{array} \rightarrow \bar{q}'' = 2, r'' = 5 = 15 : 3$$

Divisione con resto

È possibile determinare il M.C.D di due numeri naturali usando il **metodo delle divisioni successive**, detto anche **algoritmo di Euclide**.

Algoritmo ALGORITMO DI EUCLIDE

Dividiamo il maggiore dei due numeri per il minore:

- ▶ se il resto della divisione è zero, il minore dei due numeri è il M.C.D.;
- ▶ se il resto della divisione è diverso da zero, eseguiamo una nuova divisione in cui dividendo e divisore sono rispettivamente il divisore e il resto della precedente divisione:
 - se il resto della divisione è zero, il minore dei due numeri è il M.C.D.;
 - se il resto della divisione è diverso da zero, il procedimento continua eseguendo la divisione in cui dividendo e divisore sono rispettivamente il divisore e il resto della precedente divisione... e così via.

Il procedimento termina quando si ottiene resto zero. L'ultimo divisore è il M.C.D. cercato.

Divisione con resto

ESEMPIO

Calcoliamo il M.C.D. tra i numeri 1650 e 504.

- ▶ Dividiamo il numero maggiore (1650) per il minore (504):
- ▶ Poiché il resto (138) è diverso da zero, eseguiamo la divisione in cui 504 è il dividendo e 138 è il divisore:
- ▶ Poiché il resto (90) è diverso da zero, eseguiamo la divisione in cui 138 è il dividendo e 90 è il divisore:
- ▶ Poiché il resto (48) è diverso da zero, eseguiamo la divisione in cui 90 è il dividendo e 48 è il divisore:
- ▶ Poiché il resto (42) è diverso da zero, eseguiamo la divisione in cui 48 è il dividendo e 42 è il divisore:
- ▶ Poiché il resto (6) è diverso da zero, eseguiamo la divisione in cui 42 è il dividendo e 6 è il divisore:

Poiché il resto è zero, $M.C.D.(1650; 504) = 6$.

$$1650 = 504 \cdot 3 + 138.$$

$$504 = 138 \cdot 3 + 90.$$

$$138 = 90 \cdot 1 + 48.$$

$$90 = 48 \cdot 1 + 42.$$

$$48 = 42 \cdot 1 + 6.$$

$$42 = 6 \cdot 7 + 0.$$