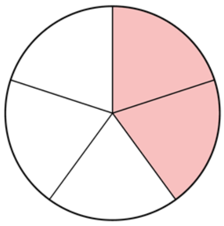
Gli insiemi numerici:
I numeri razionali assoluti

Le frazioni

In $\mathbb{N}$ abbiamo notato che alcune divisioni non sono possibili, cioè la divisione **non è interna** a $\mathbb{N}$.



Ad esempio dividere una torta in 5 parti uguali restituisce 5 fette ognuna delle quali è lo 0,20 dell'intera torta, tale valore decimale non appartiene a $\mathbb{N}$.

Si chiama **frazione** ogni coppia ordinata di numeri naturali $(a;\ b)$, il secondo dei quali diverso da zero. Si scrive $\frac{a}{b}$ e si legge «a fratto b».

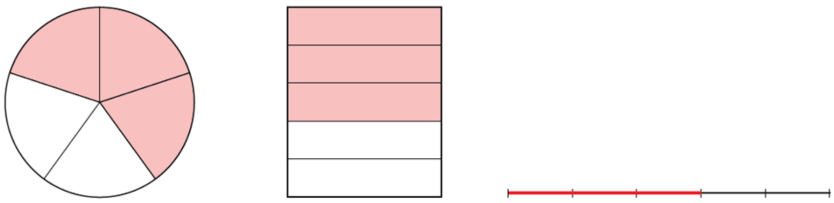
Termini della frazione $\frac{a}{b}$

Numeratore

Denominatore

Le frazioni

La frazione $\frac{3}{5}$ significa che l'intero su cui stiamo lavorando viene diviso in 5 parti uguali per poi considerarne 3. E' possibile rappresentare come segue la frazione $\frac{3}{5}$.



Una frazione del tipo $\frac{1}{n}$ con numeratore 1 si chiama **unità frazionaria.**

Le frazioni

Alcuni conseguenze della definizione di frazione sono:

- Nella definizione di frazione il numero b è stato posto diverso da zero perché la **divisione** di un numero naturale **per zero non è possibile**. Le frazioni $\frac{3}{0}$; $\frac{15}{0}$ sono prive di significato.
- I numeri naturali possono essere **pensati come frazioni** che hanno il **denominatore uguale a 1**. Per esempio $2 = \frac{2}{1}$; $7 = \frac{7}{1}$ e così via.
- Ogni frazione con numeratore 0 e denominatore diverso da 0 è **il numero naturale 0**. Ad esempio $\frac{0}{5} = \frac{0}{3} = 0$.

Quindi di seguito si considererà, se non esplicitamente indicato, il denominatore b diverso da zero.

Le frazioni

Una frazione $\frac{a}{b}$ si dice:

- **propria** se *a* < *b*: $\frac{2}{5}$ frazione propria, perché 2 < 5
- **impropria** se *a* > *b* e *a* non è multiplo di *b*: $\frac{17}{5} = 5 + \frac{2}{3}$ frazione impropria perché 17>5
- **apparente** se *a* è multiplo di *b*: $\frac{12}{6}$ frazione apparente, perché $\frac{12}{6} = 2$

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono:

- **equivalenti** se $ad = bc$: $\frac{3}{2}$ e $\frac{12}{8}$ equivalenti: infatti 3 · 8 = 2 · 12

Si noti che esistono **infinite frazioni equivalenti** ad un frazione data, poiché basta moltiplicare o dividere per una stessa quantità sia il numeratore che il numeratore.

Riduzione di una frazione ai minimi termini

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** se il numeratore e il denominatore sono primi tra loro. Una frazione ridotta ai minimi termini si dice anche **irriducibile**.

Due numeri naturali $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si dicono **primi** tra loro se il loro **M.C.D. è 1**, come ad esempio i numeri *5*, *7*, *9* e *13*.

- Determiniamo il M.C.D. del numeratore e del denominatore della frazione; → $\frac{28}{42}$; $M.C.D.(28;\ 42) = 14$
- Dividiamo il numeratore e il denominatore della frazione per il M.C.D. trovato: Otteniamo così la frazione ridotta ai minimi termini. → $\frac{28}{42} = \frac{28:14}{42:14} = \frac{2}{3}$

Riduzione di due o più frazioni allo stesso denominatore

Vogliamo trasformare le frazioni $\frac{3}{4}, \frac{11}{10}, \frac{7}{15}$ in frazioni con lo stesso denominatore.
Per farlo procediamo come segue.

- Calcoliamo il m.c.m. dei denominatori: $m.c.m.(4;\ 10;\ 15) = 60$

- Trasformiamo ogni frazione nella frazione equivalente con denominatore uguale al m.c.m. trovato;

$$(60:4 * 3 = 45) \rightarrow \frac{45}{60}$$

$$(60:10 * 11 = 66) \rightarrow \frac{66}{60}$$

$$(60:15 * 4 = 28) \rightarrow \frac{28}{60}$$

I numeri razionali assoluti: l'insieme $\mathbb{Q}_a$

Prendiamo la frazione $\frac{3}{2}$; chiamiamo **classe** l'insieme di tutte le frazioni equivalenti a una frazione data.

$$\left[\frac{3}{2}\right] = \left\{\frac{3}{2}; \frac{45}{30}; \frac{15}{10}; \frac{30}{20}; \frac{90}{60}; \frac{9}{6}; \frac{11\,952}{7968}; \frac{15\,000}{10\,000}; \ldots\right\}$$

La frazione tra parentesi quadre $\frac{3}{2}$, cioè la frazione ridotta ai minimi termini tra tutte le sue equivalenti, è detta **rappresentante** della classe.

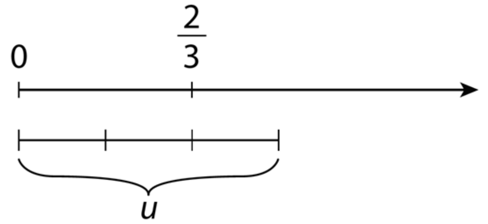
Si chiama **numero razionale assoluto** ogni classe di frazioni equivalenti.

- L'insieme di tutti i numeri razionali assoluti viene indicato con $\mathbb{Q}_a$.
- $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}_a$.

Rappresentazione di numeri razionali assoluti

Per **rappresentare** i numeri razionali assoluti ci serviamo di una semiretta con origine coincidente con il valore 0 e di un'unità di misura *u.*

Per rappresentare, ad esempio, il numero $\frac{2}{3}$, dividiamo il segmento unitario in 3 parti uguali e riportiamo sulla semiretta, a partire da *O*, due di queste parti. Otteniamo così il punto che rappresenta il numero $\frac{2}{3}$.



Confronto di numeri razionali assoluti

Per **confrontare** due numeri razionali assoluti e capire quale sia maggiore o minore o se siano uguali , confrontiamo le due frazioni che li rappresentano.

In generale per confrontare due numeri razionali assoluti portiamo le frazioni allo stesso denominatore; sarà maggiore quella con numeratore maggiore dopo la trasformazione.

Osserviamo per esempio che: $\frac{36}{20} > \frac{12}{9}$

Riducendo le frazioni ai minimi termini otteniamo infatti: $\frac{36}{20} = \frac{36:4}{20:4} = \frac{9}{5}$ $\quad \frac{12}{9} = \frac{12:3}{9:3} = \frac{4}{3}$

Portando le frazioni ad uno stesso denominatore otteniamo: $\frac{36}{20} = \frac{9}{5} = \frac{27}{15} > \frac{20}{15} = \frac{4}{3} = \frac{12}{9}$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Addizione

La **somma (addizione)** di due numeri razionali assoluti rappresentati da frazioni con lo stesso denominatore è il numero razionale assoluto rappresentato dalla frazione che ha per numeratore la somma dei numeratori e per denominatore lo stesso denominatore:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{18}_{\,6}} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$$

Proprietà — **PROPRIETÀ DELL'ADDIZIONE**

Proprietà commutativa

$a + b = b + a \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPIO

$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$

Proprietà associativa

$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPIO

$\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{4} = \frac{1}{12} + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right)$

Elemento neutro

0 è l'elemento neutro dell'addizione:

$a + 0 = 0 + a \qquad \forall a \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPIO

$0 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3} + 0 = \frac{16}{3}$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Sottrazione

La **differenza (sottrazione)** tra due numeri razionali assoluti rappresentati da frazioni con lo stesso denominatore è (se esiste) il **numero assoluto** rappresentato dalla frazione che ha per **numeratore** la **differenza dei numeratori** e per **denominatore** lo **stesso denominatore:**

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7-2}{4} = \frac{5}{4}$$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Sottrazione

Proprietà PROPRIETÀ DELLA SOTTRAZIONE

Proprietà invariantiva della sottrazione rispetto all'addizione o alla sottrazione

- $a - b = (a + c) - (b + c) \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}_a$, con $a \geqslant b$
- $a - b = (a - c) - (b - c) \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}_a$, con $a \geqslant b \geqslant c$

ESEMPI

- $\frac{7}{3} - \frac{5}{4} = \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3}\right) - \left(\frac{5}{4} + \frac{5}{3}\right)$
- $\frac{6}{5} - \frac{3}{8} = \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)$

Elemento neutro a destra

0 è l'elemento neutro a destra della sottrazione:

$a - 0 = a \qquad \forall a \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPIO

$\frac{6}{5} - 0 = \frac{6}{5}$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Moltiplicazione

Il **prodotto (moltiplicazione)** di due numeri razionali assoluti rappresentati dalle frazioni è il numero razionale assoluto rappresentato dalla frazione:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Riducendo ai minimi termini le varie frazioni, il prodotto tra frazioni **non cambia** se a una frazione (o a entrambe) si sostituisce una frazione **a essa equivalente**.

$$\frac{32}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{32:8}{16:8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Dato un numero razionale assoluto $a = \frac{p}{q}$ (con p e q diversi da 0), si dice **reciproco** di a, e si indica con $\frac{1}{a}$ il numero razionale assoluto $\frac{q}{p}$.

Il reciproco di $\frac{3}{4}$ è $\frac{4}{3}$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Moltiplicazione

Proprietà — PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE

Proprietà commutativa

$a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPIO

$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{10}{7} \cdot \frac{3}{5}$

Proprietà associativa

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPIO

$\left(\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2}\right)$

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}_a$
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPI

- $\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{4} + \frac{12}{5}\right) = \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{12}{5}\right)$
- $\left(\frac{5}{6} + \frac{10}{3}\right) \cdot \frac{9}{10} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} + \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{10}$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Moltiplicazione

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione

- $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, se $b \geqslant c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}_a$
- $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$, se $a \geqslant b \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPI

- $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8}\right)$
- $\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{16}\right) \cdot \frac{8}{7} = \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{7} - \frac{3}{16} \cdot \frac{8}{7}$

Elemento neutro

1 è l'elemento neutro per la moltiplicazione:

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \forall a \in \mathbb{Q}_a$

ESEMPIO

$\frac{2}{5} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{2}{5} = 1$

Esistenza dell'inverso

Per ogni numero razionale a con $a \neq 0$,
il **reciproco** (o **inverso**) $\frac{1}{a}$ è tale che $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

ESEMPIO

Il reciproco (o inverso) rispetto alla moltiplicazione di $\frac{5}{3}$ è $\frac{3}{5}$:

$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$

Legge di annullamento del prodotto

$a \cdot b = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$.

ESEMPI

- $\frac{2}{3} \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot \frac{2}{3} = 0$
- $0 \cdot 0 = 0$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Divisione

Il **quoziente (divisione)** di numeri razionali assoluti, di cui il secondo diverso da zero, è il numero razionale assoluto ottenuto moltiplicando il primo per il reciproco del secondo.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\frac{10}{7} : \frac{3}{2} = \frac{10}{7} \cdot \frac{2}{3}$$

Proprietà — PROPRIETÀ DELLA DIVISIONE

Proprietà invariantiva della divisione rispetto alla moltiplicazione o alla divisione

Il quoziente di due numeri razionali assoluti a e b, con $b \neq 0$, non cambia se si moltiplicano o si dividono a e b per uno stesso numero razionale assoluto diverso da zero.

- $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$, con $b \neq 0, c \neq 0$
- $a : b = (a : c) : (b : c)$, con $b \neq 0, c \neq 0$

ESEMPI

- $\frac{2}{3} : \frac{4}{3} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)$
- $\frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{4} : \frac{5}{4}\right) : \left(\frac{3}{2} : \frac{5}{4}\right)$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Divisione

Proprietà distributiva a destra della divisione rispetto all'addizione o alla sottrazione

Il quoziente di una somma (o di una differenza) di numeri razionali assoluti per un numero non cambia se si divide ogni addendo (o ogni termine della sottrazione) per quel numero e si addizionano (o si sottraggono) i quozienti ottenuti.

- $(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$, con $c \neq 0$
- $(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$, con $a \geqslant b$ e $c \neq 0$

ESEMPI

- $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) : \frac{5}{9} = \frac{5}{6} : \frac{5}{9} + \frac{1}{3} : \frac{5}{9}$
- $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) : \frac{15}{2} = \frac{3}{4} : \frac{15}{2} - \frac{1}{2} : \frac{15}{2}$

Esistenza dell'elemento neutro

1 è l'elemento neutro a destra per la divisione:

$\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$.

ESEMPIO

$\frac{3}{5} : 1 = \frac{3}{5}$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Elevamento a potenza

Dati un numero razionale assoluto $\boldsymbol{a}$ e un numero naturale $\boldsymbol{n}$, la **potenza n-esima di $\boldsymbol{a}$** è:

- il prodotto di n fattori tutti uguali ad a, se $n > 1$

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$

- 1, se $n = 0$ e $a \neq 0$ $\qquad a^0 = 1$
- a, se $n = 1$ $\qquad a^1 = a$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{2}{15}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^1 = \frac{2}{7}$$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Elevamento a potenza

Proprietà PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Se a e b sono due numeri razionali assoluti diversi da 0 e $m, n \in \mathbb{N}$, si ha:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, se $m \geqslant n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $a^n : b^n = (a : b)^n$

ESEMPI

1. $\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right)^{2+3}$
2. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{3-2}$
3. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2\cdot 5}$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}\right)^4$
5. $\left(\frac{5}{7}\right)^2 : \left(\frac{25}{9}\right)^2 = \left(\frac{5}{7} : \frac{25}{9}\right)^2$

Operazioni in $\mathbb{Q}_a$

Espressioni aritmetiche

Siamo ora in grado di risolvere la seguente espressione.

$$\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{9}\right):\left(5+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot 3-\left(3+\frac{1}{2}\right):\left(5+\frac{1}{4}\right)-\left[\left(2-\frac{1}{3}\right):20\right]=$$

$$=\left[\frac{3}{4}-\frac{12-1}{9}:\frac{10+1}{2}\right]\cdot 3-\frac{6+1}{2}:\frac{20+1}{4}-\left[\frac{6-1}{3}:20\right]=$$

$$=\left[\frac{3}{4}-\frac{11}{9}:\frac{11}{2}\right]\cdot 3-\frac{7}{2}:\frac{21}{4}-\left[\frac{5}{3}:20\right]=\left[\frac{3}{4}-\frac{\cancel{11}}{9}\cdot\frac{2}{\cancel{11}}\right]\cdot 3-\frac{\cancel{7}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{21}_{3}}-\left[\frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{1}{{}_{4}\cancel{20}}\right]=$$

$$=\left[\frac{3}{4}-\frac{2}{9}\right]\cdot 3-\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=\frac{27-8}{{}_{12}\cancel{36}}\cdot\cancel{3}-\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=\frac{19}{12}-\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=\frac{19-8-1}{12}=\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{12}_{6}}=\frac{5}{6}$$

I numeri decimali

Dividendo il numeratore per il denominatore ogni frazione può essere trasformata in un **numero decimale**.

La frazione $\frac{a}{b}$ può restituire un:

- un numero **naturale**; ⇨ $\frac{10}{5}$ restituisce il numero naturale 2.
- un numero **decimale finito**; ⇨ $\frac{11}{10}$ restituisce il numero decimale 0,1.
- un numero **decimale illimitato**. ⇨ $\frac{20}{3}$ restituisce un numero decimale illimitato.

I numeri decimali

Dalla frazione al numero decimale

Si definiscono le **frazioni decimali** quelle frazioni che hanno per denominatore **una potenza di dieci**.

Tutte le **frazioni decimali** o a esse riconducibili possono essere trasformate in numeri **decimali finiti** costituiti da una parte intera a sinistra della virgola e da una parte decimale, composta da un numero finito di cifre, a destra della virgola.

$$\frac{3}{10} = 0{,}3 \qquad \frac{9}{100} = 0{,}09$$

$$\frac{3421}{1000} = 3{,}421$$

I numeri decimali

Dalla frazione al numero decimale

Una frazione il cui denominatore contiene come fattori primi solamente **numeri diversi** da 2 e da 5 può essere trasformata in un **numero decimale illimitato periodico semplice.**

$$\frac{12}{11} = 1{,}\overline{09}$$

- 1 è la parte intera;
- 09 è il periodo.

Una frazione il cui denominatore contiene come fattori primi sia il 2 o il 5 (o entrambi) sia altri numeri diversi da 2 e da 5 può essere trasformata in un **numero decimale illimitato periodico misto.**

$$\frac{71}{110} = 0{,}6\overline{45}$$

- 0 è la parte intera;
- 6 è l'antiperiodo;
- 45 è il periodo.

I numeri decimali

Frazione generatrice di un numero decimale

La **frazione generatrice di un numero decimale** finito è la frazione che ha per numeratore il numero dato, privato della virgola, e per denominatore la potenza del 10 che ha come esponente il numero delle cifre della parte decimale.

$$0{,}0164 = \frac{0{,}0164}{1} = \frac{0{,}0164 \cdot 10000}{1 \cdot 10000} = \frac{164}{10000}$$

I numeri decimali

Frazione generatrice di un numero decimale

Per trasformare un **numero decimale periodico semplice** nella sua funzione generatrice si scrive la frazione che per numeratore ha la differenza tra il numero dato, privato della virgola, e la sua parte intera e per denominatore tanti «9» quante sono le cifre del periodo.

$$18{,}\overline{6} = \frac{186-18}{9} = \frac{168}{9} = \frac{56}{3}$$

Per trasformare un **numero decimale periodico misto** nella sua frazione generatrice si scrive la frazione che ha per numeratore la differenza tra il numero dato, privato della virgola, e la parte che precede il periodo, anch'essa privata della virgola, e per denominatore tanti «9» quante sono le cifre del periodo e tanti «0» quante sono le cifre dell'antiperiodo.

$$3{,}2\overline{8} = \frac{328-32}{90} = \frac{296}{90} = \frac{148}{45}$$

I numeri decimali

Espressioni aritmetiche con i numeri decimali

Siamo ora in grado di risolvere la seguente espressione.

$$\left\{[10 \cdot (0{,}4\overline{3} + 1{,}\overline{6}) : 1{,}\overline{5}] - 1{,}5^3 : \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} : 3{,}5 =$$

$$= \left\{\left[10 \cdot \left(\frac{43-4}{90} + \frac{16-1}{9}\right) : \frac{15-1}{9}\right] - \left(\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{10}_{2}}\right)^3 : \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} : \frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{10}_{2}} =$$

$$= \left\{\left[10 \cdot \left(\frac{\cancel{39}^{13}}{\cancel{90}_{30}} + \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{9}_{3}}\right) : \frac{14}{9}\right] - \frac{3}{2}\right\} : \frac{7}{2} =$$

$$= \left\{\left[10 \cdot \frac{13+50}{30} \cdot \frac{9}{14}\right] - \frac{3}{2}\right\} : \frac{7}{2} =$$

$$= \left\{\left[\cancel{10} \cdot \frac{\cancel{63}^{9}}{\cancel{30}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{14}_{2}}\right] - \frac{3}{2}\right\} : \frac{7}{2} =$$

$$= \left\{\frac{27}{2} - \frac{3}{2}\right\} : \frac{7}{2} = \frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{7}.$$

Le proporzioni

Si dice **rapporto** tra due numeri $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, con $b \neq 0$, il quoziente della divisione tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

Si indica con $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}$ dove

- $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono i **termini** del rapporto.
- $\boldsymbol{a}$ è l'**antecedente** e $\boldsymbol{b}$ il **conseguente**.

Il rapporto tra 15 e 35 è:

$$\mathbf{15 : 35}$$

Si dice che quattro numeri, non nulli: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$, nell'ordine, formano una **proporzione**, se sono uguali i rapporti tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e tra $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$:

$a : b = c : d \Rightarrow$ «$\boldsymbol{a}$ sta a $\boldsymbol{b}$ come $\boldsymbol{c}$ sta a $\boldsymbol{d}$»

Nella proporzione $\mathbf{1} : \mathbf{2} = \mathbf{4} : \mathbf{8}$ si ha:

- 1 e 4 sono antecedenti;
- 2 e 8 sono conseguenti;
- 2 e 4 sono medi;
- 1 e 8 sono estremi.

Le proporzioni

Proprietà delle proporzioni

Proprietà	Da $a : b = c : d$ si ottiene...	Da $4 : 3 = 8 : 6$ si ottiene...
Proprietà fondamentale Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.	$b \cdot c = a \cdot d$	$3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$
Proprietà del permutare Se in una proporzione si scambiano tra loro i medi o gli estremi si ottiene una nuova proporzione.	$a : c = b : d$ $d : b = c : a$	$4 : 8 = 3 : 6$ $6 : 3 = 8 : 4$
Proprietà dell'invertire Se in una proporzione si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente si ottiene una nuova proporzione.	$b : a = d : c$	$3 : 4 = 6 : 8$

Le proporzioni

Proprietà delle proporzioni

Proprietà del comporre In ogni proporzione la somma del primo antecedente con il proprio conseguente sta al primo antecedente (conseguente) come la somma del secondo antecedente con il proprio conseguente sta al secondo antecedente (conseguente).	$(a + b) : a = (c + d) : c$ $(a + b) : b = (c + d) : d$	$(4 + 3) : 4 = (8 + 6) : 8$ $(4 + 3) : 3 = (8 + 6) : 6$
Proprietà dello scomporre In ogni proporzione la differenza (quando è possibile calcolarla) tra il primo antecedente e il proprio conseguente sta al primo antecedente (conseguente) come la differenza tra il secondo antecedente e il proprio conseguente sta al secondo antecedente (conseguente).	$(a - b) : a = (c - d) : c$ $(a - b) : b = (c - d) : d$	$(4 - 3) : 4 = (8 - 6) : 8$ $(4 - 3) : 3 = (8 - 6) : 6$

Le proporzioni

serie di rapporti

Si chiama **serie di rapporti** una sequenza di uguaglianze tra due o più rapporti.

Proprietà PROPRIETÀ DEL COMPORRE

In una serie di rapporti la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente.

In pratica, se $a : b = c : d = e : f$, possiamo scrivere:

1. $(a + c + e) : (b + d + f) = a : b$
2. $(a + c + e) : (b + d + f) = c : d$
3. $(a + c + e) : (b + d + f) = e : f$

ESEMPIO

Da $4 : 3 = 16 : 12 = 20 : 15$, si ottiene:

1. $(4 + 16 + 20) : (3 + 12 + 15) = 4 : 3$
2. $(4 + 16 + 20) : (3 + 12 + 15) = 16 : 12$
3. $(4 + 16 + 20) : (3 + 12 + 15) = 20 : 15$

Le percentuali

Una **percentuale** è un rapporto tra numeri che ha come conseguente 100.

$$\frac{7}{100} = 7\% \qquad \frac{2{,}5}{100} = 2{,}5\%, \qquad \frac{120}{100} = 120\%$$

Nel linguaggio economico e finanziario spesso viene usato, oltre al simbolo **%** di percentuale, anche il simbolo **‰** **«per mille**».

Non si tratta di una percentuale, ma vediamo come si può ridurre a una percentuale.

Riduciamo a percentuale il **2‰**:

$2 : 1000 = x : 100$, da cui $\frac{2*100}{1000} = 0{,}2$

Deduciamo quindi che **calcolare il 2‰** di un valore **equivale** a calcolare lo **0,2%** dello stesso valore.

Approssimazione di un numero razionale assoluto

Quando si eseguono calcoli con i numeri decimali può essere necessario **usare numeri approssimati**. Si può approssimare un numero decimale in due modi diversi: *per difetto* o *per eccesso*.

Un numero decimale si dice **approssimato per difetto** a meno di $\frac{1}{10^n}$ quando viene troncato alla *n*-esima cifra decimale.

Dato il numero $\mathbf{0,\overline{63}}$:

- **0** è il valore approssimato per difetto a meno di 1 unità;
- **0,6** è il valore approssimato per difetto a meno di $\frac{1}{10}$;
- **0,63** è il valore approssimato per difetto a meno di $\frac{1}{10^2}$;
- **0,636** è il valore approssimato per difetto a meno di $\frac{1}{10^3}$.

Approssimazione di un numero razionale assoluto

Un numero decimale si dice **approssimato per eccesso** a meno di $\frac{1}{10^n}$ quando viene troncato alla n-esima cifra decimale e successivamente quest'ultima viene aumentata di 1.

Dato il numero $\mathbf{3,\overline{34}}$:

- **4** è il valore approssimato per eccesso a meno di 1 unità;
- **3,4** è il valore approssimato per eccesso a meno di $\frac{1}{10}$;
- **3,35** è il valore approssimato per eccesso a meno di $\frac{1}{10^2}$;
- **3,345** è il valore approssimato per eccesso a meno di $\frac{1}{10^3}$.

Approssimazione di un numero razionale assoluto

In base all'ultima cifra conviene approssimare un numero:

- per **difetto** se la $(n + 1)$-esima cifra dopo la virgola è **minore di 5**;
- per **eccesso** se la $(n + 1)$-esima cifra dopo la virgola è **maggiore o uguale a 5**.

Dati un numero razionale ***k*** e un suo valore approssimato ***x***, chiamiamo **errore assoluto (e_a)** il numero razionale:

$$e_a = \begin{cases} k - x \text{ se } k \geq x \\ x - k \text{ se } k < x \end{cases}$$