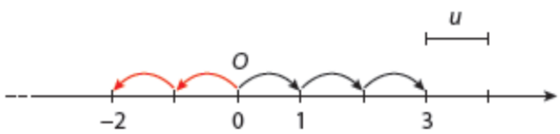
Gli insiemi numerici: i numeri relativi

I numeri relativi

In una giornata invernale la temperatura è di **2** gradi sopra lo zero. Le previsioni del tempo indicano una **diminuzione** della temperatura **di 5 gradi**.
Sappiamo che la temperatura raggiungerà i **3 gradi sotto zero**.
I **numeri naturali da soli non possono indicarci** con chiarezza se 2 gradi e 3 gradi sono temperature sopra o sotto lo zero.

Chiamiamo **numeri relativi** i numeri preceduti da un segno **+** o **-**.

... − 4, −2, 0, +1, +5 ...



I numeri relativi

I numeri interi relativi

Definizioni su $\mathbb{Z}$

I numeri naturali, escluso lo zero, preceduti dal segno **+** si dicono **numeri interi positivi** (+3, +12,...).

I numeri **naturali**, escluso lo zero, preceduti dal segno **-** si dicono **numeri interi negativi** (-5, -8,...)

Insieme dei numeri **interi positivi:** $\mathbb{Z}^+$;

insieme dei numeri **interi negativi: :** $\mathbb{Z}^-$

L'unione dei tre insiemi $\mathbb{Z}^-$, {0} e $\mathbb{Z}^+$ costituisce l'**insieme dei numeri interi relativi:**

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

I numeri relativi

I numeri razionali relativi

Definizioni su $\mathbb{Q}$

I numeri razionali, escluso lo zero, preceduti dal segno **+** si dicono **numeri razionali positivi** ($+\frac{1}{4}, +2, +\frac{7}{8}$,...).

I numeri razionali**,** escluso lo zero, preceduti dal segno **-** si dicono **numeri razionali negativi** ($-\frac{3}{4}, -7, -\frac{2}{7}$,...).

Insieme dei numeri **razionali positivi:** $\mathbb{Q}^+$;

insieme dei numeri **razionali negativi: :** $\mathbb{Q}^-$

L'unione dei tre insiemi $\mathbb{Q}^-$, {0} e $\mathbb{Q}^+$ costituisce l'**insieme dei numeri razionali relativi:**

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

I numeri relativi

Numeri concordi, discordi, opposti

Due numeri relativi, diversi da zero, si dicono **concordi** se sono preceduti dallo stesso segno.

$+5$ e $+\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{5}{3}$

Due numeri relativi, diversi da zero, si dicono **discordi** se sono preceduti da segni diversi.

$+2$ e $-\frac{3}{5}$; $+\frac{1}{4}$ e -6

Due numeri relativi, diversi da zero, si dicono **opposti** se differiscono solo per il segno. L'opposto di zero è zero.

$+5$ e -5; $-\frac{3}{5}$ e $+\frac{3}{5}$

L'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso.

I numeri relativi

Valore assoluto

Il **valore assoluto** (o **modulo**) di un numero relativo $\boldsymbol{a}$ è il numero a privato del segno.
In simboli: $|\boldsymbol{a}|$.

Dalla definizione possiamo osservare che:
- se $\boldsymbol{a}$ è un numero positivo o nullo, $|a| = a$;
- se $\boldsymbol{a}$ è un numero negativo, $|a| = -a$.

$|+3| = 3$ $\qquad$ $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

I numeri relativi

Confronto tra numeri relativi

È **sempre possibile confrontare** due numeri relativi, cioè stabilire se sono uguali, oppure qual è il numero maggiore e quale il minore.

ESEMPIO. Poniamo in ordine crescente i seguenti numeri: $-\frac{5}{6}, -\frac{8}{7}, +2, +\frac{8}{5}$.

- I numeri $-\frac{5}{6}, -\frac{8}{7}$ sono minori dei numeri $+2, +\frac{8}{5}$ perché i primi sono negativi e i secondi positivi.
- Poiché $\frac{5}{6} < \frac{8}{7}$, per i loro opposti negativi si avrà: $-\frac{5}{6} > -\frac{8}{7}$.
- Poiché $\frac{8}{7} = 1{,}1428\ldots$ e $2 > 1{,}1428\ldots$, si avrà: $2 > \frac{8}{7}$.
- Dunque i numeri in ordine crescente sono:
  $-\frac{8}{7}, -\frac{5}{6}, +\frac{8}{5} + 2$

Operazioni con i numeri relativi

Addizione

- La somma di due numeri relativi ***a*** e ***b*** **concordi** è il numero relativo ***c*** che ha per modulo la somma dei due moduli ed è concorde con ***a*** e ***b***.

$$(+5) + (+3) = +(5 + 3) = +8$$

- La somma di due numeri relativi ***a*** e ***b***, **discordi e non opposti**, è il numero relativo ***c*** che ha per modulo la differenza tra il modulo maggiore e il modulo minore ed è concorde con l'addendo che ha modulo maggiore.

$$(-5) + (+3) = -(5 - 3) = -2$$

- La somma di due numeri relativi ***a*** e ***b*** **opposti** è zero.

$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) = 0$$

Operazioni con i numeri relativi

Addizione

Proprietà DELL'ADDIZIONE

Proprietà commutativa
$a + b = b + a$, con $a, b \in \mathbb{Q}$.

ESEMPIO
$(-2) + (+3) = (+3) + (-2)$

Proprietà associativa
$(a + b) + c = a + (b + c)$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

ESEMPIO
$[(+3) + (-7)] + (+3) = (+3) + [(-7) + (+3)]$

Esistenza dell'elemento neutro
Il numero 0 è l'elemento neutro:
$a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{Q}$.

ESEMPIO
$(-4) + 0 = 0 + (-4) = (-4)$

Esistenza dell'inverso
Se a è un numero relativo, il suo opposto $-a$ è l'inverso per l'addizione:
$a + (-a) = 0, \forall a \in \mathbb{Q}$.

ESEMPIO
L'opposto (o inverso) di -5 è $+5$:
$(-5) + (+5) = 0$

Operazioni con i numeri relativi

Sottrazione

La **differenza** di due numeri relativi a e b, nell'ordine, è uguale alla somma del minuendo con l'opposto del sottraendo:

$$\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$$
$$\boldsymbol{a + b = a - (-b)}$$

Poiché ogni numero relativo ammette l'inverso rispetto all'addizione, **l'operazione di addizione è invertibile**: **l'inversa dell'addizione è la sottrazione**.

Operazioni con i numeri relativi

Sottrazione

Proprietà **PROPRIETÀ DELLA SOTTRAZIONE**

Proprietà invariantiva della sottrazione rispetto all'addizione o alla sottrazione

Sommando o sottraendo al minuendo e al sottraendo uno stesso numero relativo la differenza non cambia:

- $a - b = (a + c) - (b + c)$
- $a - b = (a - c) - (b - c)$

ESEMPI

- $(+2) - (+3) = [(+2) + (-1)] - [(+3) + (-1)]$
- $(+1) - (-2) = [(+1) - (-5)] - [(-2) - (-5)]$

Esistenza dell'elemento neutro a destra

Il numero 0 è l'elemento neutro a destra:

$a - 0 = a, \forall a \in \mathbb{Q}$.

ESEMPIO

$(+4) - 0 = (+4)$

Operazioni con i numeri relativi

Moltiplicazione

- Il **prodotto** di due numeri relativi **concordi *a*** e ***b*** è il numero positivo ***c*** che ha per modulo il prodotto dei moduli di ***a*** e ***b***.

$$(-2) \cdot (-4) = +8$$

- Il **prodotto** di due numeri relativi **discordi *a*** e ***b*** è il numero negativo ***c*** che ha per modulo il prodotto dei moduli di ***a*** e ***b***.

$$\left(+\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{15}{20} = -\frac{3}{4}$$

- Il **prodotto** di un numero relativo **per 0** è uguale a 0.

$$(+5) \cdot 0 = 0$$

Operazioni con i numeri relativi

Moltiplicazione

Per determinare il **segno di un prodotto** tra due numeri relativi si utilizza **la regola dei segni**, che costruiamo a partire dalla seguente tabella, considerando l'insieme $A = \{+; -\}$ e l'operazione « · »:

·	+	−
+	+	−
−	−	+

ESEMPIO

$$(-3)\cdot(-2) + (+3)\cdot(+5) - (-2)\cdot(+4) =$$
$$+6 + 15 + 8 = +29$$

Operazioni con i numeri relativi

Proprietà **PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE**

Proprietà commutativa

$a \cdot b = b \cdot a$

ESEMPIO

$$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(+5) = (+5)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Proprietà associativa

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

ESEMPIO

$$\left[\left(+\frac{3}{5}\right)\cdot(-2)\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(+\frac{3}{5}\right)\cdot\left[(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma algebrica

Il prodotto di un numero relativo per una somma algebrica è uguale alla somma algebrica dei prodotti che si ottengono moltiplicando il numero per ciascun addendo della somma:

- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

ESEMPI

- $(-3)\cdot\left[\left(+\frac{7}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \left[(-3)\cdot\left(+\frac{7}{3}\right)\right]+\left[(-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
- $\left[\left(+\frac{7}{5}\right)-\left(-\frac{1}{10}\right)\right]\cdot(+5) = \left[\left(+\frac{7}{5}\right)\cdot(+5)\right]-\left[\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot(+5)\right]$

Operazioni con i numeri relativi

Esistenza dell'elemento neutro
Il numero 1 è l'elemento neutro:
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

ESEMPIO
$(-10) \cdot 1 = 1 \cdot (-10) = -10$

Esistenza dell'inverso
Per ogni numero razionale relativo a, diverso da zero, l'inverso per la moltiplicazione è il suo reciproco $\frac{1}{a}$:
$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, con $a \in \mathbb{Q}_0$

ESEMPIO
Il reciproco (o inverso) di -5 è $-\frac{1}{5}$:
$(-5) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) = 1$

Legge di annullamento del prodotto
Il prodotto di due numeri relativi è zero se e solo se almeno uno dei due fattori è zero:
$a \cdot b = 0$ se e solo se $a = 0$ o $b = 0$ o entrambi.

ESEMPI
- $(+2) \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot (+2) = 0$
- $0 \cdot 0 = 0$

Operazioni con i numeri relativi

Divisione

Si dice **quoziente** di due numeri razionali relativi a e b, nell'ordine, con $b \neq 0$, quel numero q che moltiplicato per b dà come prodotto a. In simboli:

$$a : b = q$$

Proprietà — PROPRIETÀ DELLA DIVISIONE

Proprietà invariantiva della divisione rispetto alla moltiplicazione o alla divisione
- $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$
- $a : b = (a : c) : (b : c)$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$

ESEMPI
- $\left(-\frac{1}{4}\right) : (-2) = \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(+\frac{4}{5}\right)\right] : \left[(-2) \cdot \left(+\frac{4}{5}\right)\right]$
- $\left(+\frac{2}{3}\right) : (-5) = \left[\left(+\frac{2}{3}\right) : \left(+\frac{4}{3}\right)\right] : \left[(-5) : \left(+\frac{4}{3}\right)\right]$

Operando in $\mathbb{Z}$, nel caso in cui $a : b$ sia possibile,
la proprietà invariantiva della divisione rispetto alla divisione in $\mathbb{Z}$ vale solo se sono possibili anche $a : c$ e $b : c$.

Operazioni con i numeri relativi

Proprietà distributiva a destra della divisione rispetto alla somma algebrica

Il quoziente di una somma algebrica con un numero razionale relativo non cambia se si divide ogni addendo per quel numero e si addizionano successivamente i quozienti ottenuti:

$(a+b):c=(a:c)+(b:c)\quad$ con $c\neq 0$ e $a, b, c\in\mathbb{Q}$.

Operando in $\mathbb{Z}$, la proprietà distributiva vale solo se sono possibili sia $a:c$ sia $b:c$.

ESEMPIO

$$\left[\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{3}{8}\right)\right]:\left(-\frac{3}{2}\right)=\left[\left(+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)\right]+\left[\left(-\frac{3}{8}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$$

Esistenza dell'elemento neutro a destra

Il numero 1 è l'elemento neutro a destra per la divisione tra numeri relativi.

$a:1=a\quad$ con $a\in\mathbb{Q}$

ESEMPIO

$$-\frac{3}{4}:1=-\frac{3}{4}$$

Operazioni con i numeri relativi

Espressioni algebriche

ESEMPI. Calcoliamo il valore di alcune espressioni in cui compaiono numeri relativi.

$-4-[7\cdot(-6)]:\{-[-(-3+7):2+(-3+1)\cdot 3-(-2+5)\cdot(-2-3)]+(-2-3)\cdot(5+2)\}=$

- Eseguiamo le operazioni nelle parentesi tonde: $=-4-[7\cdot(-6)]:\{-[-(+4):2+(-2)\cdot 3-(+3)\cdot(-5)]+(-5)\cdot(+7)\}=$
- Eseguiamo le operazioni nelle parentesi quadre: $=-4-[-42]:\{-[-2-6+15]+(-5)\cdot(+7)\}=$
  $=-4-[-42]:\{-7-35\}=$
- Eseguiamo le operazioni nelle parentesi graffe: $=-4-[-42]:\{-42\}=$
  $=-4-1=-5$

$$\left\{\left[\left(-\frac{7}{2}+\frac{1}{6}\right):\left(-4+\frac{3}{5}\right)\right]\cdot\left(\frac{3}{4}-5\right)\right\}:\left(2-\frac{1}{3}\right)+\left(-1+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left\{\left[\frac{-21+1}{6}:\frac{-20+3}{5}\right]\cdot\frac{3-20}{4}\right\}:\frac{6-1}{3}+\frac{-4+1}{4}=\left\{\left[\frac{-\cancel{20}^{10}}{\cancel{6}_{3}}\cdot\left(-\frac{5}{17}\right)\right]\cdot\left(-\frac{17}{4}\right)\right\}:\frac{5}{3}-\frac{3}{4}=$$

$$=\left\{\frac{\cancel{50}^{25}}{\cancel{51}_{3}}\cdot\left(-\frac{\cancel{17}}{{}_{2}\cancel{4}}\right)\right\}\cdot\frac{3}{5}-\frac{3}{4}=-\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{6}_{2}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}-\frac{3}{4}=-\frac{5}{2}-\frac{3}{4}=\frac{-10-3}{4}=-\frac{13}{4}$$

Elevamento a potenza

Potenze con base un numero relativo ed esponente naturale

Dati un numero relativo $\boldsymbol{a}$ e un numero naturale n, la **potenza n-esima** $\boldsymbol{a^n}$ di $\boldsymbol{a}$ è:

- Il **prodotto** di n fattori tutti uguali ad a, se $n > 1$: $\boldsymbol{a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a}$
- **1**, se n = 0 e $a \neq 0$: $\boldsymbol{a^0 = 1;}$ $\boldsymbol{0^0}$ non ha significato
- $\boldsymbol{a}$, se n = 1: $\boldsymbol{a^1 = a}$

Elevamento a potenza

Potenze con base un numero relativo ed esponente naturale

Proprietà PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Per le operazioni con le potenze nell'insieme dei numeri relativi valgono le stesse proprietà studiate nell'insieme $\mathbb{N}$.

Se $a \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, si ha:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ con $m \geqslant n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $a^n : b^n = (a : b)^n$

ESEMPI

1. $(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^{2+3}$
2. $\left(+\frac{3}{4}\right)^4 : \left(+\frac{3}{4}\right)^3 = \left(+\frac{3}{4}\right)^{4-3}$
3. $[(-2)^2]^3 = (-2)^{2\cdot 3}$
4. $(+10)^2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \left[+10 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)\right]^2$
5. $\left(+\frac{30}{11}\right)^3 : \left(-\frac{6}{11}\right)^3 = \left[+\frac{30}{11} : \left(-\frac{6}{11}\right)\right]^3$

Elevamento a potenza

Potenze con base un numero relativo ed esponente naturale

La **potenza con esponente intero negativo** di un numero relativo diverso da zero è la frazione che ha per numeratore il numero 1 e per denominatore la stessa potenza con esponente positivo:

$$\boldsymbol{a^{-n}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a^n}}, \text{ con } a \in \mathbb{Q} - \{0\}\ e\ n \in \mathbb{N}.$$

Elevamento a potenza

Potenze con base un numero relativo ed esponente naturale

Osservazioni

Se la base è **positiva**, allora la potenza è sempre positiva;

Se la base è **negativa,** allora la potenza è positiva se l'esponente è pari e negativa se è dispari.

$$\boldsymbol{-a^2 \neq (-a)^2}$$
$$\boldsymbol{(-a)^2 = a^2}$$

Per le potenze a esponente in $\mathbb{Z}$ e base in $\mathbb{Q}$ valgono le proprietà delle potenze **1, 3, 4, 5** delle slide precedenti.

La proprietà **2** invece non richiede più la condizione $\boldsymbol{m \geq n}$ perché ora gli esponenti possono anche essere negativi.

Elevamento a potenza

Espressioni algebriche contenenti potenze

ESEMPIO. Risolviamo un'espressione algebrica con i numeri relativi contenente le quattro operazioni e l'elevamento a potenza.

$$\frac{(5,\overline{5}-0,\overline{2})(-1,5)^2+\dfrac{-2^3}{3^{-1}}}{(0,\overline{03}-1,\overline{3})(-4,\overline{7})^{-1}}+\left[\frac{2^3\cdot(-3)^{-1}}{(+3)^{-2}-1}\right]^3=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{50}{9}-\dfrac{2}{9}\right)\left(-\dfrac{{}^{3}\cancel{15}}{{}_{2}\cancel{10}}\right)^2+\dfrac{-8}{\frac{1}{3}}}{\left(\dfrac{{}^{1}\cancel{3}}{{}_{33}\cancel{99}}-\dfrac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}}\right)\cdot\left(-\dfrac{43}{9}\right)^{-1}}+\left[\frac{\dfrac{8}{-3}}{\dfrac{1}{9}-1}\right]^3=\frac{\dfrac{48}{9}\cdot\dfrac{9}{4}-8\cdot3}{\dfrac{1-44}{33}\cdot\left(-\dfrac{9}{43}\right)}+\left[-\frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{{}^{3}\cancel{9}}{\cancel{8}}\right)\right]^3=$$

$$=\frac{12-24}{-\dfrac{\cancel{43}}{{}_{11}\cancel{33}}\cdot\left(-\dfrac{{}^{3}\cancel{9}}{\cancel{43}}\right)}+[3]^3=\frac{-12}{\frac{3}{11}}+27=-12\cdot\frac{11}{3}+27=-44+27=-17$$

Leggi di monotonia e di cancellazione

Proprietà dell'uguaglianza tra numeri relativi

Proprietà

Legge di monotonia della somma algebrica
Se $a=b$, allora $a+c=b+c$.

Legge di monotonia della moltiplicazione
Se $a=b$ e $c\neq0$, allora $a\cdot c=b\cdot c$.

Regola di cancellazione della somma algebrica
Se $a+c=b+c$, allora $a=b$.

Regola di cancellazione della moltiplicazione
Se $a\cdot c=b\cdot c$ e $c\neq0$, allora $a=b$.

ESEMPI

- $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}\rightarrow\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{10}+\frac{3}{5}$
- $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}\rightarrow\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{5}$
- $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{10}+\frac{3}{5}\rightarrow\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$
- $-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{5}\rightarrow-\frac{4}{5}=-\frac{8}{10}$

Leggi di monotonia e di cancellazione

Proprietà della disuguaglianza tra numeri relativi

Proprietà — LEGGE DI MONOTONIA DELLA SOMMA ALGEBRICA

- Se $a > b$, allora $a + c > b + c$.
- Se $a < b$, allora $a + c < b + c$.
- Se $a \geqslant b$, allora $a + c \geqslant b + c$.
- Se $a \leqslant b$, allora $a + c \leqslant b + c$.

ESEMPI

- $5 > 4 \rightarrow 5 + 7 > 4 + 7$
- $3 < 6 \rightarrow 3 - \frac{3}{2} < 6 - \frac{3}{2}$

Proprietà — REGOLA DI CANCELLAZIONE PER LA SOMMA ALGEBRICA

- Se $a + c > b + c$, allora $a > b$.
- Se $a + c < b + c$, allora $a < b$.
- Se $a + c \geqslant b + c$, allora $a \geqslant b$.
- Se $a + c \leqslant b + c$, allora $a \leqslant b$.

ESEMPI

- $-1 + (+5) \geqslant -\frac{12}{5} + (+5) \rightarrow -1 \geqslant -\frac{12}{5}$
- $-2 + (+3) \leqslant \frac{12}{3} + (+3) \rightarrow -2 \leqslant \frac{12}{3}$

Leggi di monotonia e di cancellazione

Proprietà della disuguaglianza tra numeri relativi

Proprietà — LEGGE DI MONOTONIA DELLA MOLTIPLICAZIONE (I)

Se due numeri a e b sono disuguali, sono disuguali nello stesso senso anche i numeri che si ottengono moltiplicandoli per uno stesso numero relativo c positivo:

- se $a > b$, allora $a \cdot c > b \cdot c$ con $c > 0$
- se $a < b$, allora, $a \cdot c < b \cdot c$ con $c > 0$
- se $a \geqslant b$, allora, $a \cdot c \geqslant b \cdot c$ con $c > 0$
- se $a \leqslant b$, allora, $a \cdot c \leqslant b \cdot c$ con $c > 0$

ESEMPI

- $-\frac{5}{6} < -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} < -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, cioè $-\frac{5}{8} < -\frac{3}{8}$
- $3 > 2 \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{6} > 2 \cdot \frac{1}{6}$, cioè $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Proprietà — LEGGE DI MONOTONIA DELLA MOLTIPLICAZIONE (II)

Se due numeri a e b sono disuguali, sono disuguali in senso opposto anche i numeri che si ottengono moltiplicandoli per uno stesso numero relativo c negativo:

- se $a > b$, allora $a \cdot c < b \cdot c$ con $c < 0$
- se $a < b$, allora $a \cdot c > b \cdot c$ con $c < 0$
- se $a \geqslant b$, allora $a \cdot c \leqslant b \cdot c$ con $c < 0$
- se $a \leqslant b$, allora $a \cdot c \geqslant b \cdot c$ con $c < 0$

ESEMPI

- $-\frac{5}{6} < -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) > -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$, cioè $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$
- $3 > 2 \rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) < 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$, cioè $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$

Leggi di monotonia e di cancellazione

Proprietà della disuguaglianza tra numeri relativi

Proprietà **REGOLA DI CANCELLAZIONE PER LA MOLTIPLICAZIONE (I)**

Se due numeri a e b, moltiplicati ognuno per uno stesso numero relativo c, maggiore di zero, sono disuguali, sono disuguali nello stesso senso anche i numeri a e b:

- se $a \cdot c > b \cdot c$, allora $a > b$ con $c > 0$
- se $a \cdot c < b \cdot c$, allora $a < b$ con $c > 0$
- se $a \cdot c \geqslant b \cdot c$, allora $a \geqslant b$ con $c > 0$
- se $a \cdot c \leqslant b \cdot c$, allora $a \leqslant b$ con $c > 0$

Se dividiamo o moltiplichiamo entrambi i numeri di una disuguaglianza per un numero positivo otteniamo ancora una disuguaglianza dello **stesso** verso.

ESEMPI

- Da $-21 > -35$, che si può riscrivere come $-3 \cdot (+7) > -5 \cdot (+7)$, otteniamo $-3 > -5$.
- Da $+15 < +20$, che si può riscrivere come $(+3) \cdot (+5) < (+4) \cdot (+5)$, otteniamo $+3 < +4$.

Leggi di monotonia e di cancellazione

Proprietà della disuguaglianza tra numeri relativi

Proprietà **REGOLA DI CANCELLAZIONE PER LA MOLTIPLICAZIONE (II)**

Se due numeri a e b moltiplicati ognuno per uno stesso numero relativo c, minore di zero, sono disuguali, sono disuguali in senso opposto anche i numeri a e b:

- se $a \cdot c > b \cdot c$, allora $a < b$ con $c < 0$
- se $a \cdot c < b \cdot c$, allora $a > b$ con $c < 0$
- se $a \cdot c \geqslant b \cdot c$, allora $a \leqslant b$ con $c < 0$
- se $a \cdot c \leqslant b \cdot c$, allora $a \geqslant b$ con $c < 0$

Se dividiamo o moltiplichiamo entrambi i numeri di una disuguaglianza per un numero negativo otteniamo una disuguaglianza di **verso opposto**.

ESEMPI

- Da $-18 > -24$, che si può riscrivere come $+3 \cdot (-6) > +4 \cdot (-6)$, otteniamo $+3 < +4$.
- Da $-15 < -9$, che si può riscrivere come $+5 \cdot (-3) < +3 \cdot (-3)$, otteniamo $+5 > +3$.

Caratteristiche degli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

- Un insieme in cui ogni elemento ha un ben determinato successivo si dice **ordinato in modo discreto**
- Se riusciamo sempre a trovare il successivo di un dato numero di un campo dei numeri, si dice che quel campo di numeri contiene **infiniti** elementi, quindi è **un insieme infinito**

$\mathbb{N}$

- L'insieme $\mathbb{N}$ **ha un primo elemento**, che è lo zero;
- $\mathbb{N}$ **è un insieme ordinato in modo discreto**;
- $\mathbb{N}$ **è un insieme infinito**.

$\mathbb{Z}$

- L'insieme $\mathbb{Z}$ **non ha un primo elemento**;
- $\mathbb{Z}$ **è un insieme ordinato in modo discreto**;
- $\mathbb{Z}$ **è un insieme infinito**.

$\mathbb{Q}$

- L'insieme $\mathbb{Q}$ **non ha un primo elemento**;
- dati due numeri razionali sappiamo che ne esiste sempre uno compreso, quindi $\mathbb{Q}$ viene detto **ordinato e denso**;
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$**,** quindi $\mathbb{Q}$ **è un insieme infinito**.

Introduzione ai numeri reali $\mathbb{R}$

L'operazione di estrazione di radice n-esima, **non è sempre possibile** nell'insieme $\mathbb{Q}$; tale operazione è possibile solo se il numero razionale assegnato è la potenza n-esima di un numero razionale.

ESEMPIO. Non è possibile calcolare $\sqrt{8}$ in $\mathbb{Q}$; non esiste infatti alcun numero razionale che, elevato al quadrato, dia come risultato il numero 8.

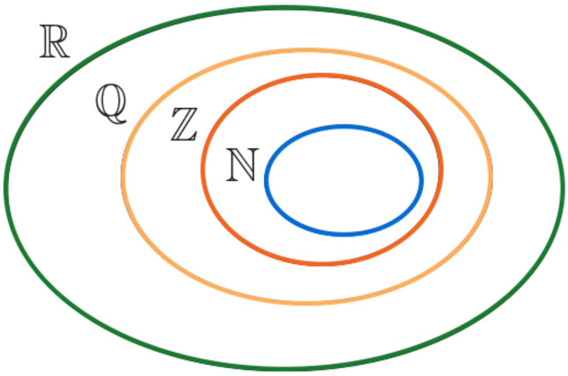
Per estrarre la radice quadrata di un numero **che non è un quadrato perfetto** è sempre necessario approssimare il risultato. Il procedimento di estrazione, in questi casi, **non ha mai termine**.

Si chiama numero **irrazionale** ogni numero decimale illimitato non periodico.
L'insieme dei numeri razionali relativi e dei numeri irrazionali relativi si chiama **insieme dei numeri reali** $\mathbb{R}$**.**
Se indichiamo con $\mathbb{I}$ **l'insieme dei numeri irrazionali**, si ha allora: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Introduzione ai numeri reali $\mathbb{R}$

Sono esempi di numeri reali: $-\sqrt{2}, \pi, 0, +3\sqrt{3}, +42, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -12, +\frac{9}{13}, -\frac{5}{2}, \ldots$

Per come sono stati costruiti,
gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono **sottoinsiemi** di $\mathbb{R}$.



Notazione esponenziale, notazione scientifica e ordine di grandezza

Notazione esponenziale

La carica dell'elettrone è circa **0,000000000000000000160219 C** (Coulomb).

Operare con tali numeri scritti in notazione decimale diventa piuttosto complesso, ma possiamo operare **più facilmente** se li scriviamo utilizzando le **potenze del 10**, sia con esponente positivo sia con esponente negativo.

Un numero si dice scritto in **notazione esponenziale** se si presenta come prodotto di un numero decimale finito per una potenza di 10.

$10 = 10^1$
$100 = 10^2$
$1000 = 10^3$
$0{,}1 = 10^{-1}$
$0{,}01 = 10^{-2}$
$0{,}001 = 10^{-3}$

Notazione esponenziale, notazione scientifica e ordine di grandezza

Notazione esponenziale

- Se spostiamo la **virgola a sinistra** dobbiamo moltiplicare il numero ottenuto per 10 elevato **al numero di cifre** di cui la virgola è stata spostata.
- Se spostiamo la **virgola a destra** dobbiamo moltiplicare il numero ottenuto per 10 elevato **all'opposto del numero di cifre** di cui la virgola è stata spostata.
- Se il **numero è intero** la virgola sia posizionata dopo l'ultima cifra.

$10 = 10^1$
$100 = 10^2$
$1000 = 10^3$
$0{,}1 = 10^{-1}$
$0{,}01 = 10^{-2}$
$0{,}001 = 10^{-3}$

$700 \cdot 10^7 = 7 \cdot 10^9$

Notazione esponenziale, notazione scientifica e ordine di grandezza

Notazione scientifica

La carica dell'elettrone è circa $\mathbf{0,000000000000000000160219}\,\boldsymbol{C} = \mathbf{1,62} \cdot \mathbf{10^{-19}}\,C$.

È nata la necessità di scrivere i numeri in notazione esponenziale posizionando la virgola con un particolare criterio che fosse universale, in modo da poter esprimere ogni numero in forma corretta al contesto.

Un numero si dice scritto in **notazione scientifica** se si presenta nella forma $\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{10}^{\boldsymbol{k}}$, con: $p \in \mathbb{Q}_a, 1 \leq p < 10\ e\ k \in \mathbb{Z}$.

Notazione esponenziale, notazione scientifica e ordine di grandezza

Ordine di grandezza

Un numero si dice scritto in **notazione scientifica** se si presenta nella forma $\boldsymbol{p \cdot 10^k}$, con:
$p \in \mathbb{Q}_a$, $1 \le p < 10$ e $k \in \mathbb{Z}$.

L'ordine di grandezza di un numero è la potenza del 10 più vicina al numero.

- Se $\mathbf{1} \le \boldsymbol{p} < \mathbf{5}$, l'ordine di grandezza del numero è $\mathbf{10}^{\boldsymbol{k}}$**.**

- Se $\mathbf{5} \le \boldsymbol{p} < \mathbf{10}$, l'ordine di grandezza del numero è $\mathbf{10}^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}$.

ESEMPIO. Determiniamo **l'ordine di grandezza** di 0,00000005678

- Scriviamo il numero in notazione scientifica: $0{,}00000005678 = 5{,}678 \cdot 10^{-8}$.

- Poiché $5 \le 5{,}678 < 10$ l'ordine di grandezza di 0,00000005678 è $10^{-8+1} = 10^{-7}$