Gli insiemi numerici: I sistemi di numerazione

I sistemi di numerazione additivi

Un **sistema di numerazione** è un insieme di simboli e di regole che consentono di scrivere e di leggere i numeri.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
•	••	•••	••••		<u>.</u>	<u></u>			=

Il simbolo • rappresenta l'unità. Cinque simboli • corrispondono al simbolo —

Nei **sistemi di numerazione additivi**, ogni numero viene letto sommando i valori numerici dei simboli che formano il numero.

I simboli utilizzati in questi sistemi hanno sempre lo stesso valore, indipendentemente dal posto che occupano, nella maggior parte dei casi.

I sistemi di numerazione additivi

Anche il sistema di numerazione romano è additivo e comprende 7 simboli:

- ▶ I che rappresenta l'unità (1)
- ▶ V che rappresenta il numero 5
- X che rappresenta il numero 10
- L che rappresenta il numero 50
- ▶ C che rappresenta il numero 100
- ▶ D che rappresenta il numero 500
- ▶ M che rappresenta il numero 1000

Pur essendo additivo, nel sistema romano era **importante** osservare la **posizione occupata** dalle cifre. Se la cifra minore era posta a sinistra della cifra maggiore il numero si otteneva sottraendo la cifra minore dalla maggiore.

IX è il numero 10-1=9

I sistemi di numerazione posizionale

Un sistema di numerazione si dice **posizionale** se il valore di ogni cifra dipende dalla posizione che essa occupa nel numero.

Il nostro sistema di numerazione è posizionale.

I dieci simboli con i quali scriviamo sono detti cifre.

Poiché sono 10 le cifre che utilizziamo, il nostro sistema è detto **sistema decimale** o sistema in base 10.

I simboli con i quali scriviamo sono i seguenti: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

- ▶ Il numero 1 è detto *unità semplice*, o unità del primo ordine.
- ▶ Dieci unità semplici formano una decina, o unità del secondo ordine.
- Dieci decine formano un centinaio, o unità del terzo ordine.
- ▶ Dieci centinaia formano un migliaio, o unità del quarto ordine, e così via.

I sistemi di numerazione posizionale

Unità	Unità del 1° ordine	10°
Decine	Unità del 2° ordine	10¹
Centinaia	Unità del 3° ordine	10 ²
Migliaia	Unità del 4° ordine	10³

Il numero 343 si legge «trecentoquarantatré», e significa: 3 centinaia, 4 decine, 3 unità.

La cifra 3, quindi, vale 3 unità se la sua posizione è la prima da destra verso sinistra e vale 3 centinaia se la sua posizione è la terza da destra verso sinistra. La cifra 4 vale 4 decine.

Il numero 343 può anche essere scritto nella seguente forma polinomiale:

$$343 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

I sistemi di numerazione posizionale

Si dice base di un sistema di numerazione il numero dei simboli usati nel sistema stesso.

le cifre sono:

0, 1, 2, 3, 4, 5.

- Nel sistema di numerazione di base 6 > Il numero 1 è detto unità del primo ordine.
 - ▶ Sei unità del primo ordine formano una unità del secondo ordine.
 - ▶ Sei unità del secondo ordine formano una unità del terzo ordine e così via.

(342)₆ è un numero in base 6 e si legge: «tre quattro due in base 6».

Nei sistemi di numerazione con base superiore a dieci, i simboli del sistema decimale non sono sufficienti, ci conviene allora aggiungere, nell'ordine, le prime lettere maiuscole dell'alfabeto: A, B, C... utilizzate come numeri.

> Nel sistema di numerazione di base 16 (esadecimale) le cifre sono: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

I sistemi di numerazione posizionale

	Base 2	Base 3	Base 6	Base 8	Base 16	base n
Unità del 1° ordine	2º	3º	6º	80	16º	nº
Unità del 2° ordine	2 ¹	3 ¹	6 ¹	8 ¹	16¹	n¹
Unità del 3° ordine	2 ²	3 ²	6 ²	8 ²	16²	n²
Unità del 4° ordine	2 ³	3 ³	6 ³	8 ³	16³	n³
Unità del 5° ordine	24	3 ⁴	64	84	16⁴	n ⁴

La scrittura polinomiale in base X del numero $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 \ a_0$ è:

$$a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + a_{n-2} \cdot X^{n-2} + \dots + a_1 \cdot X^1 + a_0 \cdot X^0$$

$$(342)_6 = 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$$

 $(1A4)_{16} = 1 \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0$

Cambiamento di base in un sistema posizionale

La scrittura in forma polinomiale di un numero in **base diversa da 10** ci permette di passare alla corrispondente scrittura **in base 10**.

Trasformazione

Scrivere il numero sotto forma polinomiale.

Eseguire le operazioni indicate (ricordando che lettere corrispondono ad un determinato numero nel sistema decimale).

$$(1B4)_{16} = 1 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0$$

Ricordando che B = 11

$$= 256 + 176 + 4 = 436$$

Cambiamento di base in un sistema posizionale

Per trasformare un numero **in base 10** nella corrispondente scrittura **in una base diversa** da 10 operiamo con divisioni successive.

rasformazione

Dividere il numero in base 10 per il valore della nuova base.

Dividere il quoziente trovato sempre per il valore della nuova base.

Continua a dividere i quozienti successivi per lo stesso valore finché si ottiene come quoziente lo zero.

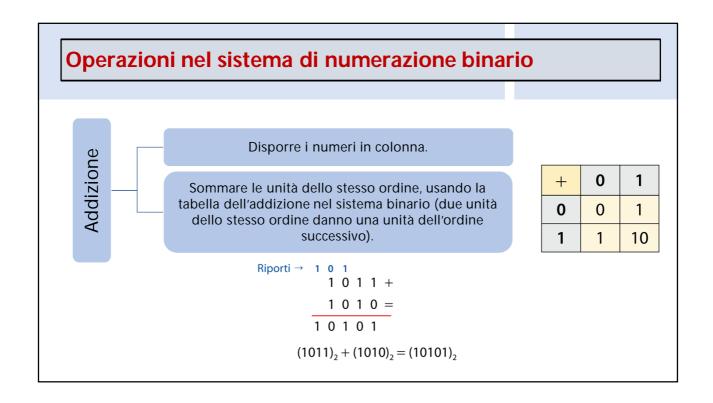
Leggendo i resti ottenuti dall'ultimo fino al primo si ottiene il numero nella nuova base.

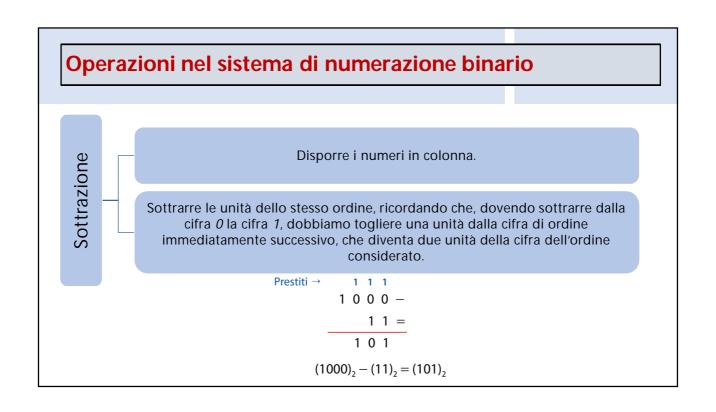
Il numero in base 6 corrispondente al numero 95 nel sistema decimale è: $95 = (235)_6$

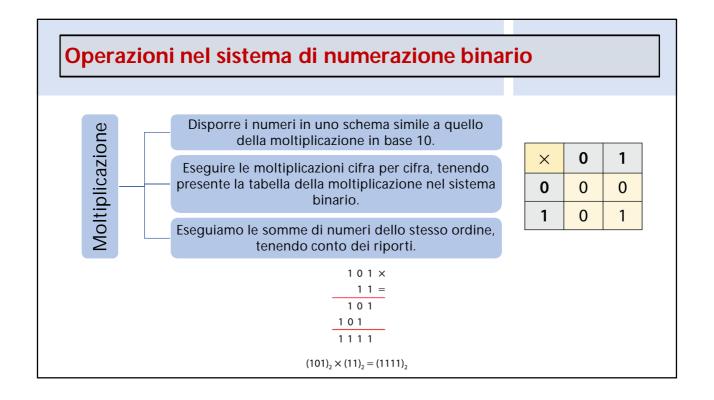
Operazioni nel sistema di numerazione binario

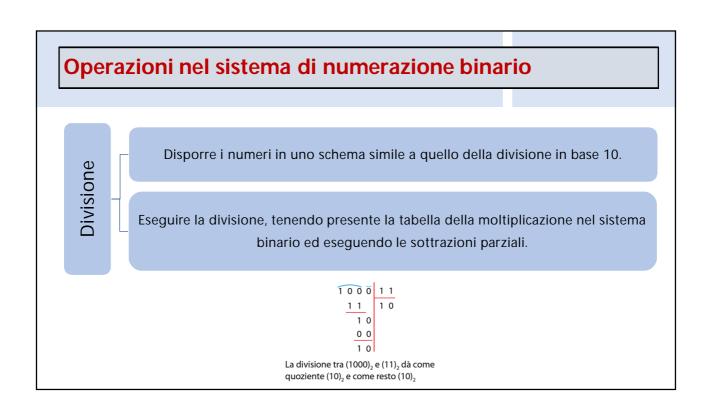
Il sistema posizionale a base 2 è anche chiamato sistema di numerazione binario.

Come in qualsiasi altro sistema di numerazione posizionale, si possono eseguire le **quattro operazioni** seguendo procedimenti e regole analoghi a quelli che si usano per le operazioni con numeri in base 10.









Operazioni nel sistema di numerazione binario

Ecco alcuni semplici esempi di espressioni con numeri in base 2.

1.
$$[(1101 + 1011) - 1010] \cdot 111 =$$

= $[11000 - 1010] \cdot 111 =$
= $1110 \cdot 111 = 1100010$

2.
$$[101 \cdot (110 - 11) + (110 + 11) \cdot 10] : 11 =$$

= $101 \cdot 11 + 1001 \cdot 10] : 11 =$
= $[1111 + 10010] : 11 =$
= $100001 : 11 = 1011$

Operazioni in altre basi

Le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione sono possibili anche nei sistemi di numerazione con base diversa da quella decimale e da quella binaria.

Tabelle dell'addizione e della moltiplicazione nel sistema ternario (in base 3):

+	+ 0		2	
0	0	1	2	
1	1	2	10	
2	2	10	11	

×	0	1	2	
0	0	0	0	
1	0	1	2	
2	0	2	11	

Passaggio dalla base 2 a una base di potenza di 2

In generale, per passare da una base a a una base b, entrambe diverse da zero, dobbiamo:

- passare dalla base a alla base 10;
- passare dalla base 10 alla base b.

Per trasformare il numero (135), nel corrispondente in base 4:

1. trasformiamo il numero $(135)_7$ in base 10: $(135)_7 = (75)_{10}$

2. trasformiamo il numero $(75)_{10}$ in base 4: $(75)_{10} = (1023)_4$

Otteniamo allora $(135)_7 = (1023)_4$.

Quando b è una potenza di a, la conversione dalla base a alla base b (e viceversa) può avvenire senza ricorrere al passaggio alla base 10.

Passaggio dalla base 2 a una base di potenza di 2

Vogliamo passare dalla base binaria a = 2 alla base ottale $b = 2^3$.

- ▶ I primi otto numeri del sistema binario sono i seguenti: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111.
- ▶ I primi otto numeri del sistema ottale sono i seguenti: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- ▶ Confrontandoli, ci accorgiamo che i primi otto numeri della base ottale sono scritti con una cifra e che gli stessi numeri nella base binaria sono scritti con, al massimo, tre cifre.
- Per scrivere, ad esempio, il numero (1010101000101)₂ nel suo corrispondente in base 8, suddividiamo allora le cifre, da destra a sinistra, in gruppi di tre nel modo seguente:
 - 1 010 101 000 101
- Utilizzando la corrispondenza tra i primi otto numeri del sistema binario e i primi otto numeri del sistema ottale scriviamo sotto ogni gruppo di tre cifre del numero il valore corrispondente nella base 8 (tabella 10).

TAB.		Base 2	1	010	101	000	101
10	1	Base 8	1	2	5	0	5

Concludendo, $(1010101000101)_2 = (12505)_8$.