Gli insiemi numerici:
I sistemi di numerazione

I sistemi di numerazione additivi

Un **sistema di numerazione** è un insieme di simboli e di regole che consentono di scrivere e di leggere i numeri.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
•	••	•••	••••	—	• —	•• —	••• —	•••• —	=

Il simbolo • rappresenta l’unità.
Cinque simboli • corrispondono al simbolo —

Nei **sistemi di numerazione additivi**, ogni numero viene letto sommando i valori numerici dei simboli che formano il numero.

I simboli utilizzati in questi sistemi hanno sempre lo stesso valore, indipendentemente dal posto che occupano, nella maggior parte dei casi.

I sistemi di numerazione additivi

Anche il **sistema di numerazione romano** è additivo e comprende 7 simboli:

- I che rappresenta l'unità (1)
- V che rappresenta il numero 5
- X che rappresenta il numero 10
- L che rappresenta il numero 50
- C che rappresenta il numero 100
- D che rappresenta il numero 500
- M che rappresenta il numero 1000

Pur essendo additivo, nel sistema romano era **importante** osservare la **posizione occupata** dalle cifre. Se la cifra minore era posta a sinistra della cifra maggiore il numero si otteneva sottraendo la cifra minore dalla maggiore.

IX è il numero 10-1=9

I sistemi di numerazione posizionale

Un sistema di numerazione si dice **posizionale** se il valore di ogni cifra dipende dalla posizione che essa occupa nel numero.

Il nostro sistema di numerazione è posizionale.
I dieci simboli con i quali scriviamo sono detti **cifre**.
Poiché sono 10 le cifre che utilizziamo, il nostro sistema è detto **sistema decimale** o sistema in base 10.

I simboli con i quali scriviamo sono i seguenti:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- Il numero 1 è detto *unità semplice*, o unità del primo ordine.
- Dieci unità semplici formano una *decina*, o unità del secondo ordine.
- Dieci decine formano un *centinaio*, o unità del terzo ordine.
- Dieci centinaia formano un *migliaio*, o unità del quarto ordine, e così via.

I sistemi di numerazione posizionale

Unità	Unità del 1° ordine	10^0
Decine	Unità del 2° ordine	10^1
Centinaia	Unità del 3° ordine	10^2
Migliaia	Unità del 4° ordine	10^3
...	...	...

Il numero 343 si legge «*trecentoquarantatré*», e significa:
3 *centinaia*, 4 *decine*, 3 *unità*.

La cifra 3, quindi, vale 3 **unità** se la sua posizione è la prima da destra verso sinistra e vale 3 **centinaia** se la sua posizione è la terza da destra verso sinistra. La cifra 4 vale 4 **decine**.

Il numero 343 può anche essere scritto nella seguente **forma polinomiale**:

$$343 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

I sistemi di numerazione posizionale

Si dice **base** di un sistema di numerazione il numero dei simboli usati nel sistema stesso.

Nel sistema di numerazione di **base 6** le cifre sono:
0, 1, 2, 3, 4, 5.

- Il numero 1 è detto *unità del primo ordine*.
- Sei unità del primo ordine formano una *unità del secondo ordine*.
- Sei unità del secondo ordine formano una *unità del terzo ordine* e così via.

$(342)_6$ è un numero in base 6 e si legge: «tre quattro due in base 6».

Nei sistemi di numerazione con **base superiore a dieci**, i simboli del sistema decimale non sono sufficienti, ci conviene allora aggiungere, nell'ordine, le prime lettere maiuscole dell'alfabeto: A, B, C… utilizzate come numeri.

Nel sistema di numerazione di **base 16** (esadecimale) le cifre sono:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

I sistemi di numerazione posizionale

	Base 2	Base 3	Base 6	Base 8	Base 16	base *n*
Unità del 1° ordine	2^0	3^0	6^0	8^0	16^0	n^0
Unità del 2° ordine	2^1	3^1	6^1	8^1	16^1	n^1
Unità del 3° ordine	2^2	3^2	6^2	8^2	16^2	n^2
Unità del 4° ordine	2^3	3^3	6^3	8^3	16^3	n^3
Unità del 5° ordine	2^4	3^4	6^4	8^4	16^4	n^4

La **scrittura polinomiale in base X** del numero $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1\ a_0$ è:

$$a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + a_{n-2} \cdot X^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot X^1 + a_0 \cdot X^0$$

$$(342)_6 = 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$$
$$(1A4)_{16} = 1 \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0$$

Cambiamento di base in un sistema posizionale

La scrittura in forma polinomiale di un numero in **base diversa da 10** ci permette di passare alla corrispondente scrittura **in base 10**.

Trasformazione

- Scrivere il numero sotto forma polinomiale.
- Eseguire le operazioni indicate (ricordando che lettere corrispondono ad un determinato numero nel sistema decimale).

$(1B4)_{16} = 1 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0$

Ricordando che $B = 11$

$= 256 + 176 + 4 = 436$

Cambiamento di base in un sistema posizionale

Per trasformare un numero **in base 10** nella corrispondente scrittura **in una base diversa** da 10 operiamo con divisioni successive.

Trasformazione

- Dividere il numero in base 10 per il valore della nuova base.
- Dividere il quoziente trovato sempre per il valore della nuova base.
- Continua a dividere i quozienti successivi per lo stesso valore finché si ottiene come quoziente lo zero.
- Leggendo i resti ottenuti dall'ultimo fino al primo si ottiene il numero nella nuova base.

95	6		
5	15	6	
	3	2	6
		2	0

Il numero in base 6 corrispondente al numero 95 nel sistema decimale è:
$95 = (235)_6$

Operazioni nel sistema di numerazione binario

Il sistema posizionale a base 2 è anche chiamato **sistema di numerazione binario**.

Come in qualsiasi altro sistema di numerazione posizionale, si possono eseguire le **quattro operazioni** seguendo procedimenti e regole analoghi a quelli che si usano per le operazioni con numeri in base 10.

Operazioni nel sistema di numerazione binario

Addizione

- Disporre i numeri in colonna.
- Sommare le unità dello stesso ordine, usando la tabella dell'addizione nel sistema binario (due unità dello stesso ordine danno una unità dell'ordine successivo).

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

$$\begin{array}{lrrrrrl} \text{Riporti} \rightarrow & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 & = \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$(1011)_2 + (1010)_2 = (10101)_2$

Operazioni nel sistema di numerazione binario

Sottrazione

- Disporre i numeri in colonna.
- Sottrarre le unità dello stesso ordine, ricordando che, dovendo sottrarre dalla cifra *0* la cifra *1*, dobbiamo togliere una unità dalla cifra di ordine immediatamente successivo, che diventa due unità della cifra dell'ordine considerato.

$$\begin{array}{lrrrrl} \text{Prestiti} \rightarrow & & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & - \\ & & & 1 & 1 & = \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$(1000)_2 - (11)_2 = (101)_2$

Operazioni nel sistema di numerazione binario

Moltiplicazione

- Disporre i numeri in uno schema simile a quello della moltiplicazione in base 10.
- Eseguire le moltiplicazioni cifra per cifra, tenendo presente la tabella della moltiplicazione nel sistema binario.
- Eseguiamo le somme di numeri dello stesso ordine, tenendo conto dei riporti.

×	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,1 \;\times \\
1\,1 \;= \\
\hline
1\,0\,1 \\
1\,0\,1 \\
\hline
1\,1\,1\,1
\end{array}
$$

$(101)_2 \times (11)_2 = (1111)_2$

Operazioni nel sistema di numerazione binario

Divisione

- Disporre i numeri in uno schema simile a quello della divisione in base 10.
- Eseguire la divisione, tenendo presente la tabella della moltiplicazione nel sistema binario ed eseguendo le sottrazioni parziali.

$$
\begin{array}{r|l}
1\,0\,0\,0 & 1\,1 \\
\cline{2-2}
1\,1 & 1\,0 \\
1\,0 & \\
0\,0 & \\
\cline{1-1}
1\,0 &
\end{array}
$$

La divisione tra $(1000)_2$ e $(11)_2$ dà come quoziente $(10)_2$ e come resto $(10)_2$

Operazioni nel sistema di numerazione binario

Ecco alcuni semplici esempi di espressioni con numeri in base 2.

1. $[(1101 + 1011) - 1010] \cdot 111 =$
$= [11000 - 1010] \cdot 111 =$
$= 1110 \cdot 111 = 1100010$

2. $[101 \cdot (110 - 11) + (110 + 11) \cdot 10] : 11 =$
$= 101 \cdot 11 + 1001 \cdot 10] : 11 =$
$= [1111 + 10010] : 11 =$
$= 100001 : 11 = 1011$

Operazioni in altre basi

Le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione sono possibili anche nei sistemi di numerazione con base diversa da quella decimale e da quella binaria.

Tabelle dell'addizione e della moltiplicazione nel sistema ternario (in base 3):

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Passaggio dalla base 2 a una base di potenza di 2

In generale, per passare da una base *a* a una base *b*, entrambe diverse da zero, dobbiamo:
- passare dalla base *a* alla base 10;
- passare dalla base 10 alla base *b*.

Per trasformare il numero $(135)_7$ nel corrispondente in base 4:

1. trasformiamo il numero $(135)_7$ in base 10: $(135)_7 = (75)_{10}$
2. trasformiamo il numero $(75)_{10}$ in base 4: $(75)_{10} = (1023)_4$

Otteniamo allora $(135)_7 = (1023)_4$.

Quando *b* è una potenza di *a*, la conversione dalla base *a* alla base *b* (e viceversa) può avvenire senza ricorrere al passaggio alla base 10.

Passaggio dalla base 2 a una base di potenza di 2

Vogliamo passare dalla base binaria $a = 2$ alla base ottale $b = 2^3$.

- I primi otto numeri del sistema binario sono i seguenti: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111.
- I primi otto numeri del sistema ottale sono i seguenti: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- Confrontandoli, ci accorgiamo che i primi otto numeri della base ottale sono scritti con una cifra e che gli stessi numeri nella base binaria sono scritti con, al massimo, tre cifre.
- Per scrivere, ad esempio, il numero $(1010101000101)_2$ nel suo corrispondente in base 8, suddividiamo allora le cifre, da destra a sinistra, in gruppi di tre nel modo seguente:

  1 010 101 000 101
- Utilizzando la corrispondenza tra i primi otto numeri del sistema binario e i primi otto numeri del sistema ottale scriviamo sotto ogni gruppo di tre cifre del numero il valore corrispondente nella base 8 (**tabella 10**).

TAB. 10

Base 2	1	010	101	000	101
Base 8	1	2	5	0	5

Concludendo, $(1010101000101)_2 = (12505)_8$.