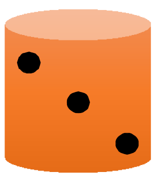
Il calcolo letterale

I monomi

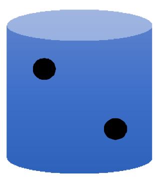
Il calcolo letterale

Nel corso dei tuoi studi hai già avuto modo di incontrare e utilizzare **formule matematiche** in cui compaiono operazioni che legano tra loro **lettere e numeri**.

Proviamo ad esempio a risolvere il seguente problema:
Francesca possiede delle scatole arancioni e blu contenenti biglie in diversa misura:



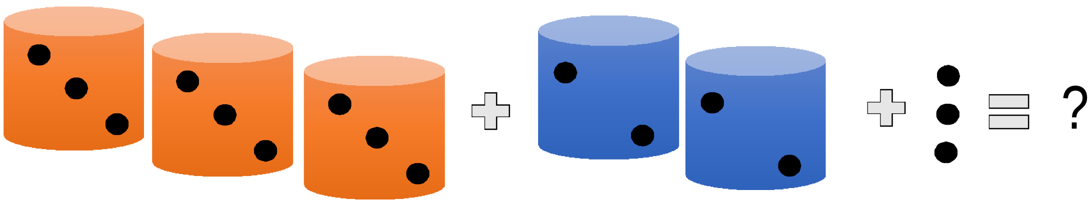
Ogni scatola arancione contiene 3 biglie



Ogni scatola blu contiene 2 biglie

Il calcolo letterale

Quante biglie possiede Francesca se in totale ha 3 scatole arancioni e 2 blu,
più 3 biglie sparse?



Per risolvere scriveremo: $3a + 2b + 3$

Il calcolo letterale

Chiamiamo **espressione algebrica** un insieme finito di operazioni tra numeri e lettere, (che rappresentano numeri).

Per trovare il **valore numerico** di un'espressione non facciamo altro che sostituire alle **lettere** i **numeri** che attribuiamo a esse.

Nel nostro caso i valori sono il numero di biglie che contengono: $a = 3$ e $b = 2$

Sostituiamoli nell'espressione: $3a + 2b + 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$

Il calcolo letterale

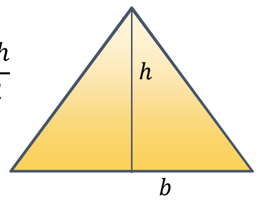
Proprietà

- 1.All'interno di un'espressione algebrica una **lettera** può essere ripetuta più volte.
  - A una lettera è attribuito sempre lo stesso valore.
  - Due lettere diverse possono indicare sia due numeri diversi sia lo stesso numero.
- Vi sono casi in cui le lettere non possono assumere particolari valori perché in tali casi l'espressione perde di significato. → $\frac{2a}{b}, \Rightarrow b \neq 0$; $\frac{5}{x-2}, \Rightarrow x \neq 2$
- In un'espressione algebrica chiamiamo **costanti** i numeri e **variabili** quelle lettere alle quali possiamo attribuire valori diversi.

I monomi: definizioni e caratteristiche

Un **monomio** è un'espressione algebrica che si ottiene come **prodotto** di **fattori numerici e letterali**; gli esponenti delle lettere sono numeri naturali.

$$A = \frac{bh}{2}$$

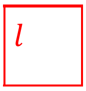


Dalla definizione segue che un monomio può essere formato da **un solo** numero, da **una sola** lettera o da un **prodotto** di lettere e numeri: 34, a, 34 · a, ...

I monomi: definizioni e caratteristiche

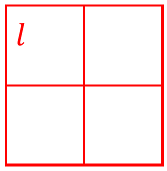
1. Area del quadrato di lato l:

$A = l \cdot l = l^2$



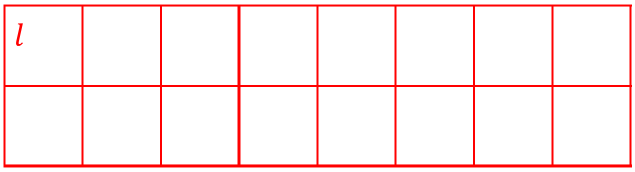
2. Se abbiamo 4 quadrati:

$A = 4 \cdot l \cdot l = 4l^2$



3. Se abbiamo 4 volte 4 quadrati:

$A = 4 \cdot 4 \cdot l \cdot l = 16l^2$



I monomi: definizioni e caratteristiche

Alcune importanti osservazioni sui monomi:

- non sono monomi tutte le espressioni in cui compaiono addizioni e sottrazioni: $3a + 4b, 2x - y, \ldots$;
- anche il numero 0 è un monomio, detto **monomio nullo**;
- non sono monomi tutte le espressioni in cui gli esponenti delle lettere non sono numeri naturali: $3c^{-2}, \frac{2}{a}, \ldots$

I monomi: definizioni e caratteristiche

Un monomio è **ridotto a forma normale** se è espresso come prodotto di un solo fattore numerico, appartenente ai numeri reali, e di potenze letterali con basi tutte diverse tra loro.

- Il fattore numerico si dice **coefficiente**;
- Le potenze letterali costituiscono la **parte letterale**.

ESEMPIO. Scriviamo in forma normale il monomio $3^2 zt^3 \frac{1}{3} z^2$.

$$3^2 zt^3 \frac{1}{3} z^2 \quad \Rightarrow \quad 3t^3 z^3 = 3(tz)^3$$

Per una più facile lettura è consuetudine scrivere le lettere che compaiono in un monomio in ordine alfabetico, e il coefficiente prima della parte letterale.

I monomi: definizioni e caratteristiche

Si chiama **grado di un monomio rispetto a una lettera** l'esponente con cui quella lettera compare nel monomio.

Si chiama **grado complessivo** (o semplicemente **grado**) **di un monomio** la somma degli esponenti delle lettere che compaiono nel monomio.

Osserviamo che:

- se una lettera compare **senza esponente** il suo grado è 1;
- se una lettera **non compare** nel monomio, il grado rispetto a quella lettera è 0;
- se un monomio **non ha parte letterale**, il suo grado complessivo è 0.

$14p^3q^2$

Grado di p:	3
Grado di q:	2
Grado complessivo:	**5**

I monomi: definizioni e caratteristiche

Si dice che due monomi sono **simili** se hanno parte letterale uguale e differiscono, eventualmente, solo per i coefficienti.

$4x^2y$ e $-\frac{3}{5}x^2y$

Si dice che due monomi sono **uguali** se sono simili e hanno lo stesso coefficiente.

$3^{-1}ab$ e $\frac{1}{3}ab$

Si dice che due monomi sono **opposti** se sono simili e i coefficienti sono numeri opposti.

$+\frac{1}{5}x^2y$ e $-\frac{1}{5}x^2y$

Operazioni con monomi

Addizione e sottrazione: la somma algebrica

La somma e la differenza tra monomi può essere eseguita solo tra **monomi simili**; il risultato è un monomio avente come parte numerica la somma o sottrazione dei vari fattori numerici, presi ognuno con il suo segno.

$$4t^2x + 7ab - 2t^2x = 2t^2x + 7ab$$

$$6a^2b - 5ab^2 - ab - 4a^2b = 2a^2b - 5ab^2 - ab$$

$$3ab + 7ba = 3ab + 7ab = 10ab$$

OSSERVAZIONE. È consuetudine riportare i vari monomi ordinandoli per grado.

Operazioni con monomi

Moltiplicazione

La **moltiplicazione** tra monomi è un monomio avente come coefficiente il prodotto dei singoli fattori e parte letterale data da tutte le lettere dei singoli monomi, ciascuna con esponente uguale alla somma degli esponenti delle singole lettere.

$$(3x^2y)\left(-\frac{2}{3}x^3z^4\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)x^2x^3yz^4 = -2\,x^5yz^4$$

- Per la moltiplicazione tra monomi valgono le proprietà associativa e commutativa.
- 1 è l'elemento **neutro**; 0 e l'elemento **assorbente**.
- Il grado del prodotto di monomi non nulli è uguale alla somma dei gradi dei singoli monomi.

Operazioni con monomi

Divisione

Si dice che un monomio è **divisibile** per un altro monomio, non nullo, quando esiste un terzo monomio che, moltiplicato per il secondo, dà come risultato il primo.

Il **quoziente** di due monomi, presi in un dato ordine, il primo dei quali divisibile per il secondo (non nullo), è un monomio che ha per coefficiente il quoziente dei due coefficienti e per parte letterale il quoziente delle parti letterali.

ESEMPIO

I seguenti monomi sono divisibili? $8t^4x^3 : (-2t^4x) = ?$

- Poiché $-2t^4x \cdot (-4t^2x^2) = 8t^4x^3$, allora $8t^4x^3 : (-2t^4x) = -4t^2x^2$

Operazioni con i monomi

Elevamento a potenza

La **potenza *n*-esima di un monomio**, con $n \in N$ e $n \geq 1$, è un monomio, prodotto di n fattori uguali al monomio stesso.

- Per ogni monomio *A* non nullo si ha: $A^0 = 1$.
- Per ogni monomio *A* si ha: $A^1 = A$.

$$(2x^2yz^3)^3 = 2^{(1\cdot3)}x^{(2\cdot3)}y^{(1\cdot3)}z^{(3\cdot3)} = 8x^6y^3z^9$$

Proprietà delle potenze: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Operazioni con i monomi

Espressioni con i monomi

Tutte le regole sulle operazioni tra monomi viste fino ad adesso concorrono nella risoluzione delle espressioni con i monomi.

ESEMPIO. Risolviamo un'espressione in cui compaiono i monomi e le operazioni tra essi.

$$4x^2y^3 + \left(-\frac{3}{2}x^4y^2\right)^2 : \left(-\frac{1}{4}x^6y\right) + [-(-3xy)^2 : (xy) + xy] \cdot (-xy^2) =$$

- Eleviamo a potenza: $= 4x^2y^3 + \frac{9}{4}x^8y^4 : \left(-\frac{1}{4}x^6y\right) + [-(9x^2y^2) : (xy) + xy] \cdot (-xy^2) =$
- Eseguiamo le divisioni: $= 4x^2y^3 - 9x^2y^3 + [-9xy + xy] \cdot (-xy^2) =$
- Eseguiamo l'operazione nella parentesi quadra: $= 4x^2y^3 - 9x^2y^3 - 8xy \cdot (-xy^2) =$
- Eseguiamo la moltiplicazione: $= 4x^2y^3 - 9x^2y^3 + 8x^2y^3 =$
- Riduciamo i monomi simili: $= 3x^2y^3$

M.C.D. e m.c.m. tra monomi

Massimo comune divisore

Si chiama **massimo comune divisore** (*M.C.D.*) di due o più monomi, non nulli, il monomio di grado massimo che è divisore comune dei monomi dati.

ESEMPIO. Consideriamo i monomi $15x^2y^3z \ e \ 10xy^4$ e determiniamone il *M.C.D.*

- Se i coefficienti sono tutti numeri interi, il *M.C.D.* ha per coefficiente il *M.C.D.* dei loro valori assoluti:

$$M.C.D.(15; 10) = \mathbf{5}$$

- La parte letterale del *M.C.D.* è il prodotto di tutti i fattori letterali comuni ai monomi dati, presi una sola volta e con il minimo esponente con cui compaiono:

$$M.C.D.(15x^3y^3z; 10xy^4) = 5xy^3$$

M.C.D. e m.c.m. tra monomi

Massimo comune divisore

M.C.D.

- Se i coefficienti non sono tutti numeri interi, il *M.C.D.* ha per coefficiente +1.
- Se i monomi hanno segni diversi, il *M.C.D.* ha segno positivo.
- Due monomi sono primi tra loro se il loro *M.C.D.* è 1.

M.C.D. e m.c.m. tra monomi

Minimo comune multiplo

Si chiama **minimo comune multiplo** (*m.c.m.*) di due o più monomi, non nulli, il monomio di grado minimo che è multiplo dei monomi dati.

ESEMPIO. Consideriamo i monomi $15x^2y^3z$ e $10xy^4$ e determiniamone il m. c. m.

- Se i coefficienti sono tutti numeri interi, il $m.c.m$. ha per coefficiente il *M.C.D.* dei loro valori assoluti:

$$m.c.m. (15; 10) = 30$$

- La parte letterale del m. c. m è il prodotto di tutti i fattori letterali comuni ai monomi dati, presi una sola volta e con il massimo esponente con cui compaiono:

$$m.c.m. (15x^3y^3z; 10xy^4) = 30x^2y^4z$$

M.C.D. e m.c.m. tra monomi

Minimo comune multiplo

m.c.m.

- Se i coefficienti non sono tutti numeri interi, il *m.c.m.* ha per coefficiente +1.
- Se i monomi hanno segni diversi, il *m.c.m.* ha segno positivo.
- Il *m.c.m.* è utile per calcolare le espressioni tra monomi frazionari.