Il calcolo letterale: I Polinomi

I polinomi: definizioni e caratteristiche

Si dice **polinomio** la somma algebrica di più monomi.

Nomenclatura Polinomi:

- $5xy$ Monomio
- $4ab^3 - 2a^2b$ Binomio
- $2a^2b + 3ab^4 - 2$ Trinomio

Quando in un polinomio sono stati ridotti tutti i monomi simili, il polinomio si dice **ridotto a forma normale.**

$$4 - 4xy^2 + 7xy^2 = 4 + 3xy^2$$

I monomi che compaiono in un polinomio si dicono *termini* del polinomio.

I polinomi: definizioni e caratteristiche

Grado di un polinomio

Si chiama **grado** di un polinomio **rispetto a una lettera** il massimo dei gradi con cui quella lettera compare nel polinomio.
Si chiama **grado complessivo** (o semplicemente **grado**) di un polinomio il massimo dei gradi dei monomi che lo compongono.

Polinomio	$4ab^3 - 2a^2b$	$2a^2b + 3ab^4 - 2$	$5xy$	$4 + 3xy^2$
Grado rispetto ad *a*	2	2	0	0
Grado rispetto a *b*	3	4	0	0
Grado rispetto a *x*	0	0	1	1
Grado rispetto a *y*	0	0	1	2
Grado complessivo	4	5	2	3

In un polinomio, un monomio di grado zero si dice **termine noto.**

I polinomi: definizioni e caratteristiche

Polinomi omogenei, ordinati, completi

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

$$a^2x^3 - \frac{1}{2}ax^4 + 3x^5 + \frac{1}{3}a^5$$

Un polinomio è **ordinato rispetto a una lettera** se, leggendo i suoi termini da sinistra a destra, gli esponenti di quella lettera sono disposti in ordine decrescente o crescente.
Un polinomio può essere allora, rispettivamente:

- ordinato **secondo le potenze decrescenti** della lettera;
- ordinato **secondo le potenze crescenti** della lettera.

Decrescenti:

$$-2x^4 + \frac{1}{3x^3} + 3x^3 + x - 1$$

Crescenti:

$$-3 - 4ax + 5ax^2$$

I polinomi: definizioni e caratteristiche

Polinomi omogenei, ordinati, completi

Un polinomio è **completo rispetto a una lettera** se, ordinato secondo le potenze decrescenti o crescenti di quella lettera, contiene tutte le potenze della lettera, da quella con esponente più grande a quella con esponente zero (o viceversa).

Ordinato e completo di grado 5: $\frac{1}{2}y^5 - 3y^4 + 2y^3 - y^2 + y - 1$

Ogni polinomio completo di grado ***n*** contiene ***n* + 1** termini.

Operazioni con i polinomi

Addizione e sottrazione: la somma algebrica

La **somma di due o più polinomi** è un polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi: parliamo quindi di somma algebrica tra polinomi, intendendo con questa espressione sia l'operazione di **addizione** sia quella di **sottrazione**.

$$(2xy - a^2) - (3ab + 2xy) + (3ab + 2a^2) =$$
$$= 2xy - a^2 + (-3ab - 2xy) + 3ab + 2a^2 =$$
$$= 2xy - a^2 - 3ab - 2xy + 3ab + 2a^2 = a$$

Dato un polinomio, si chiama **polinomio opposto** il polinomio che si ottiene cambiando il segno **a tutti** i termini del polinomio dato.

L'opposto del polinomio: $+5ab - 3a + 1$ è il polinomio $-5ab + 3a - 1$

Operazioni con i polinomi

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Il **prodotto di un monomio per un polinomio** è il polinomio che ha come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.

$$3x^2y\cdot\left(\underbrace{4x^3y}-\underbrace{\frac{1}{2}x^4}\right)=3x^2y\cdot(4x^3y)+3x^2y\cdot\left(-\frac{1}{2}x^4\right)=12x^5y^2-\frac{3}{2}x^6y$$

- Il prodotto del monomio nullo per un polinomio qualsiasi è il **monomio nullo**.
- il grado del polinomio prodotto di un polinomio di grado m con un monomio di grado n è $m+n$.

Operazioni con i polinomi

Moltiplicazione tra polinomi

Il **prodotto di due polinomi** è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo polinomio e sommando algebricamente i termini ottenuti.

$$\begin{aligned}(3x^2-2y)(\underbrace{4y-2x^2+1}) &= 3x^2(4y-2x^2+1)-2y(4y-2x^2+1)=\\ &=12x^2y-6x^4+3x^2-8y^2+4x^2y-2y=\\ &=16x^2y-6x^4+3x^2-8y^2-2y\end{aligned}$$

- Il polinomio prodotto di due polinomi che contengono m e n termini contiene al massimo $m\cdot n$ termini.

Operazioni con i polinomi

Divisione di un polinomio per un monomio

- **Un polinomio è divisibile per un monomio**, non nullo, soltanto se ogni lettera del monomio divisore compare, con grado maggiore o uguale, in ogni monomio del polinomio dividendo.
- Il **quoziente tra un polinomio e un monomio**, non nullo, tali che il primo sia divisibile per il secondo, è il polinomio ottenuto dividendo **ogni termine** del polinomio per il monomio divisore.

$$\left(-5x^3y^4+\frac{25}{4}x^2y^3-\frac{5}{2}xy^2\right):\left(\frac{5}{2xy^2}\right)=-2x^2y^2+\frac{5}{2}xy-1$$

I prodotti notevoli

Quadrato di un binomio

I prodotti notevoli sono formule note tra polinomi, di cui conosciamo i risultati e a cui è pratico ricondursi durante la risoluzione di espressioni con polinomi.

Siano ***A,B,C*** monomi.

Il **quadrato di un binomio** ha come sviluppo il trinomio che contiene il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine per il secondo e il quadrato del secondo termine.

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \qquad (A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$

$$(3a\pm 4b)^2=(3a)^2+2(3a)(\pm 4b)+(4b)^2=9a^2\pm 24ab+16b^2$$

Da notare che se i termini del binomio sono:
- **concordi** allora tutti i termini del prodotto notevole saranno **positivi**;
- **discordi** allora i termini quadratici del prodotto notevole saranno positivi, mentre il **doppio prodotto** sarà **negativo**.

I prodotti notevoli

Quadrato di un trinomio

Il **quadrato di un trinomio** ha come sviluppo un polinomio, che contiene i quadrati dei termini del trinomio e i doppi prodotti di ciascuno di essi con tutti quelli che lo seguono.

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

$$(3a - 2b + 4c)^2$$
$$= [(3a) + (-2b) + (4c)]^2$$
$$= (3a)^2 + (-2b)^2 + (4c)^2 + 2(3a)(-2b) + 2(3a)(4c)$$
$$+ 2(-2b)(4c) = 9a^2 + 4b^2 + 16c^2 - 12ab + 24ac - 16bc$$

Il quadrato di un polinomio con un **numero qualunque di termini** ha come sviluppo un polinomio che contiene i quadrati dei termini del polinomio e i doppi prodotti di ciascuno di essi con tutti quelli che lo seguono.

I prodotti notevoli

Prodotto della somma di due termini per la loro differenza

Il **prodotto della somma di due termini per la loro differenza** è uguale alla differenza tra il quadrato del primo termine e il quadrato del secondo.

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

- $(a + 4b)(a - 4b) =$ con $A = a$ e $B = 4b$:
  $= (a)^2 - (4b)^2 = a^2 - 16b^2$

- $(3x + 2y + 1)(3x + 2y - 1) =$ con $A = 3x + 2y$ e $B = 1$:
  $= [(3x + 2y)^2 - 1] = 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 1$

I prodotti notevoli

Cubo di un binomio

Il **cubo di un binomio** ha come sviluppo il polinomio che contiene il cubo del primo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo e il cubo del secondo termine.

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad (A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$(3ab - 2a^2)^3 =$ con $A = 3ab$ e $B = 2a^2$:

$= (3ab)^3 - 3(3ab)^2(2a^2) + 3(3ab)(2a^2)^2 - (2a^2)^3 =$

$= 27a^3b^3 - 54a^4b^2 + 36a^5b - 8a^6$

I prodotti notevoli

Potenza n-esima di un binomio

$$(A+B)^0 = 1$$
$$(A+B)^1 = A + B$$
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$
$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$$
$$(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$$

Data l'esponente n avremo $n+1$ termini: per n grandi avrò un grande e complicato numero di termini da gestire.

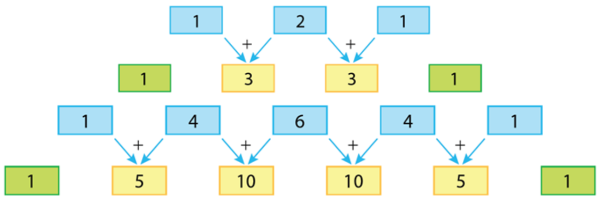
La **potenza n-esima del binomio $A + B$** ha come sviluppo un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti di A e crescenti di B, i cui coefficienti sono quelli dell'n-esima riga del **triangolo di Tartaglia**.

I prodotti notevoli

Potenza n-esima di un binomio

riga 0						1						
riga 1					1		1					
riga 2				1		2		1				
riga 3			1		3		3		1			
riga 4		1		4		6		4		1		
riga 5	1		5		10		10		5		1	

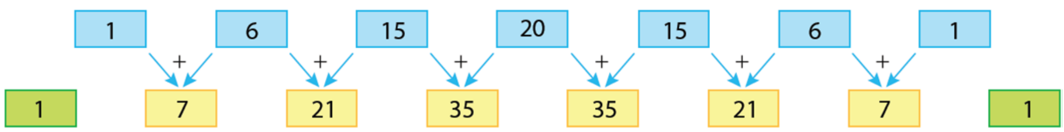
nella **riga 0** si trova il valore di $(A + B)^0$, nella **riga 1** si trovano i coefficienti di $(A + B)^1$, nella **riga 2** i coefficienti di $(A + B)^2$, e così via.



Ogni riga si può ottenere dalla precedente: i coefficienti della **riga 3**, cioè di $(A + B)^3$, si ottengono sommando a coppie i numeri della **riga 2**, i coefficienti di $(A + B)^5$ si ottengono come somma delle coppie di numeri della **riga 4**, e così via.

I prodotti notevoli

Potenza n-esima di un binomio



$$\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)^7$$

$$= x^{14} + \frac{7}{2}x^{12}y + \frac{21}{4}x^{10}y^2 + \frac{35}{8}x^8y^3 + \frac{35}{16}x^6y^4 + \frac{21}{32}x^4y^6 + \frac{7}{64}x^2y^6 + \frac{1}{128}y^7$$